

Белавин А. А., Кулаков А. Г., Усманов Р. А.

# Лекции по теоретической физике

2-е издание, исправленное и дополненное

Москва  
Издательство МЦНМО  
2001

УДК 530  
ББК 22.3

Б43

*Издание осуществлено при поддержке РFFI*  
(издательский проект № 00–02–30001).



**Белавин А. А., Кулаков А. Г., Усманов Р. А.**

Б43      Лекции по теоретической физике — 2-е изд., испр. и доп.—  
М.: МЦНМО, 2001.— 224 с.: ил.

ISBN 5-900916-91-X

Книга написана на основе курса лекций, в течении ряда лет прочитанных в Независимом московском университете. Эти лекции были посвящены изложению принципов и методов как классических, так и совсем недавно возникших областей теоретической физики. По сравнению с прошлым изданием (1999 г.) текст книги существенно расширен и переработан.

Для физиков и математиков различных специальностей, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

ББК 22.3

© Белавин А. А., Кулаков А. Г., Усманов Р. А., 2001.  
ISBN 5-900916-91-X      © МЦНМО, 2001.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Теория относительности и уравнения Максвелла . . . . .	6
1. Специальная теория относительности . . . . .	6
2. Лагранжева механика . . . . .	22
3. Уравнения теории поля . . . . .	32
4. ОТО (гравитация) . . . . .	60
2. Квантовая механика . . . . .	78
1. Введение . . . . .	78
2. Общие принципы . . . . .	82
3. Одномерное движение . . . . .	97
4. Движение в трехмерном пространстве . . . . .	103
5. Теория возмущений . . . . .	117
6. Квазиклассическое приближение . . . . .	123
7. Уравнение Дирака. Релятивистская теория электрона . . . . .	131
3. Точно решаемые модели квантовой теории поля . . . . .	138
1. Основные определения . . . . .	138
2. Модель Изинга . . . . .	148
3. Вершинные модели . . . . .	182
4. Бете-анзатц . . . . .	202

## ВВЕДЕНИЕ

Эйнштейн: «Физика основывает свои понятия на измерениях, причем представления и утверждения физики могут быть выражены математически.»

«Физика стремится найти объединение всех областей на теоретической основе, образованной минимальным числом понятий и фундаментальных соотношений, из которых логически можно вывести все.»

«Глубокое убеждение в достижимости этой цели является главным источником страстной преданности, которая всегда воодушевляет исследователя.»

Физика находит в математике язык и прообразы, математика в физике — смутные очертания понятий и аксиом, а также проблемы.

В следующей таблице показаны разделы физики и математики, оказавшие существенное влияние друг на друга.

Физика	Математика
Измерения Земли, астрономия	Геометрия Евклида
Небесная механика Кеплера, Ньютона	Анализ
Гидродинамика, электродинамика	Дифференциальные уравнения
Общая теория относительности	Дифференциальная геометрия
Квантовая механика	Гильбертово пространство, теория представлений групп
Калибровочные теории, инстантоны	Геометрия расслоенных пространств
Теория струн. Конформная теория поля	Бесконечномерные алгебры Ли

Существуют три вида физики: экспериментальная — с этой части физики собственно началась физика, без нее она не может существовать, и это понятно всем; теоретическая физика — та ее часть, в которой возникают основные понятия и язык, строятся модели и постулируются уравнения, описывающие реальный мир; и математи-

ческая физика, в которой эти уравнения решаются. Одна из основных задач этого курса — показать, какими принципами руководствуются физики, придумывая уравнения, описывающие наш мир. Курс расписан на 4 семестра. Вот примерный план курса:

5 семестр — классическая теория поля (специальная теория относительности, электродинамика, общая теория относительности);

6 семестр — квантовая механика;

7, 8 семестры — модель Изинга, точно решаемые модели квантовой теории поля.

Прежде, чем перейти к теории относительности, сделаем одно замечание.

## **Евклидова структура пространства**

Когда мы в геометрии употребляем слова точка, прямая, плоскость, их содержание не существенно, аксиомы служат им определением, а математически существенно отсутствие противоречий в определениях и аксиомах.

Когда мы употребляем эти слова в физике, мы должны указать способ их измерения и наблюдения (прямо или косвенно). Это простое замечание не всегда учитывалось. Ярчайший пример — понятие абсолютного времени, существовавшее до Эйнштейна и лишенное физического содержания.

# ЧАСТЬ 1

## ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### 1. Специальная теория относительности

Утверждение о евклидовости пространства бессмысленно, пока не указаны физические объекты, соответствующие точкам, прямым и т. д.

Движение в механике — это изменение *положения* тела. Под положением понимается *относительное положение*, положение относительно других тел. Понятие абсолютного положения, положения в *абсолютном пространстве* лишено физического содержания.

Тело или система тел, относительно которых определяется положение, — это пространственная система отсчета.

Утверждение о том, что два неодновременных события произошли в одном месте, лишено физического содержания. Представьте, например, что вы едете в поезде. То, что происходит в одном месте для вас, происходит в разных местах для наблюдателя на станции.

В качестве пространственной системы отсчета можно взять твердое тело, в качестве координатных осей — твердые стержни, про которые, как мы предполагаем, *верны утверждения евклидовой трехмерной геометрии*. Их надо проверять. Например, Гаусс проверил равенство суммы углов треугольника  $180^\circ$  для трех горных вершин на расстоянии  $\approx 100$  км. Расчет движения планет и спутников дает лучшую точность. При этом евклидовость геометрии пространства является лишь частью предположений, роль прямых в ней играют лучи света, а не стержни.

Так же можно проверять, что длина твердого стержня не зависит от пути переноса.

Можно брать разные системы координат. Переходы от одной ортогональной системы координат к другой образуют группу движе-

ний трехмерного евклидова пространства, состоящую из вращений и сдвигов.

В качестве простейших можно взять вращения ( $XY$ ), ( $YZ$ ), ( $ZX$ ) и сдвиги ( $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$ ,  $z' = z + c$ ).

Длина твердого стержня не меняется при движениях. Другими словами,

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

является инвариантом. Это свойство — результат соглашения и экспериментальной проверки.

Итак, *пространство изотропно и однородно или пространство евклидово*.

## Время

Время измеряется *часами*. Часы — это тело (система тел), совершающее периодический процесс. Примеры: маятник, вращение Земли, колебание электромагнитного поля.

Колебания часов, выбранных в качестве эталона, считаются равномерными по определению.

## Пространственно-временная система отсчета

Если в каком-то месте есть часы, мы можем определять моменты, в которые в этом месте происходят события.

Если события происходят в разных местах, то надо определить, что значит, что они одновременны.

Эйнштейн предложил следующий способ определения синхронности часов. Часы в точках  $A$  и  $B$  назовем синхронными, если лучи света, одновременно вышедшие из середины отрезка  $AB$  в направлении точек  $A$  и  $B$ , достигают этих точек при одинаковых показаниях часов. Нужно проверять, что понятие синхронных часов по Эйнштейну транзитивно, т. е. если часы в точках  $A$  и  $B$  синхронны и часы в точках  $B$  и  $C$  синхронны, то и часы в точках  $A$  и  $C$  синхронны. Совокупность физических опытов является такой проверкой.

## Принцип относительности Галилея

*Инерциальной системой отсчета* называется система, в которой график движения свободной материальной точки — прямая.

Инерциальные системы существуют, и их много. Это экспериментальный факт. Если система движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно, то она также является инерциальной (т. е. положение движущейся системы в каждый момент времени получается из предшествующего сдвигом, причем равным промежуткам времени отвечают равные сдвиги). Это утверждение называется *законом инерции*.

Естественно считать, что если у системы тел в некоторый момент заданы положения и скорости, то они однозначно определяют их положения и скорости в будущем. Этот принцип называется *принципом причинности*.

Если совершить преобразование начальных условий (сдвиг в пространстве, вращение, сдвиг времени), то движение совершается по траектории, полученной тем же преобразованием.

Ньютона предполагал (и это экспериментально подтверждается с некоторой точностью), что при переходе от одной инерциальной системы к другой не меняются масштаб и время. Например, если система движется в направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ , то координаты преобразуются по следующему правилу:  $x' = x + vt$ ,  $t' = t$ .

Такие преобразования образуют *группу Галилея*. Уравнение  $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$  — инвариант этой группы.

**Следствие.** Если система отсчета  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $V$ , а в системе отсчета  $K$  скорость тела равна  $v$ , то  $v' = v + V$ .

## Свет

Свет имеет конечную скорость, волновые свойства и электромагнитную природу. Так как свет имеет волновые свойства, возникло предположение, что это колебание некоторой среды — эфира, — подобно волнам на воде. Это означало, что существует выделенная система координат, в которой эфир неподвижен. С целью обнаружить скорость Земли относительно эфира был произведен опыт Майкельсона. Его результат: скорость относительно эфира равна 0. Возникло предположение, что эфир увлекается Землей. Но это предположение опровергается опытом Физо и aberrацией при наблюдении звезд. Итак, эфира не существует.

Отрицательный результат опыта Майкельсона можно объяснить также гипотезой истечения Ритца о том, что свет имеет постоянную скорость относительно источника излучения, а не относительно наблюдателя. Но эта гипотеза опровергается наблюдением двойных звезд.

Опыт Кеннеди и Торнадийка прямо проверяет одинаковость скоростей света в разных системах отсчета. В этом опыте в интерферометре Майкельсона различная длина плеч инструмента приводит к интерференции, и экспериментатор может наблюдать, смещаются ли интерференционные полосы в течение долгого времени — когда Земля реализует разные системы отсчета.

Два принципа могут объяснить все эти факты.

- A) Принцип относительности (включая одинаковость скорости света относительно неподвижного источника в разных инерциальных системах).
- B) Независимость скорости света от движения источника в одной инерциальной системе отсчета.

Вместе эти принципы противоречат ньютонову понятию *одновременности* (априорному, метафизическому) и тем самым преобразованиям Галилея, а именно, утверждению

$$t' = t \text{ и } \Delta x' = \Delta x \text{ для } t_1 = t_2.$$

Значит, преобразования Галилея надо изменить.

Попробуем найти преобразования координат при переходе в систему отсчета, движущуюся относительно данной со скоростью  $V$  по оси  $x$ ,  $x' = x'(x, t)$  и  $t' = t'(x, t)$ , которые удовлетворяют следующим требованиям:

- (1) прямые (график движения свободной частицы) переходят в прямые. Это принцип относительности.
- (2) Световой конус (график движения света) переходит в себя. Это — принцип независимости скорости света от движения источника.
- (3) Преобразование со скоростью  $-V$  является обратным к преобразованию со скоростью  $V$ .

- (4) Композиция преобразования со скоростью  $-V$  и отражения — преобразование со скоростью  $V$ .

Из (1) и того факта, что бесконечные точки переходят в бесконечные, следует линейность.

Вместо (1) можно потребовать однородность пространства и времени, что означает, что промежутку времени  $\Delta t$  в системе  $K$  соответствует определенный промежуток  $\Delta t'$  в системе  $K'$ , и сдвиг  $\Delta x'$  не зависит от  $x$  и  $t$ .

Выведем такое преобразование в случае одной пространственной координаты  $x$ .

В силу линейности

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Следствием этих формул является принцип относительности: равномерное движение в системе  $K$  остается таковым и в системе  $K'$ . Это не удивительно, ибо мы уже требовали выполнения этого принципа, когда сказали, что одинаковые промежутки времени и одинаковые масштабы в разные моменты времени и разных точках пространства в системе  $K$  остаются таковыми и в системе  $K'$ .

Если потребовать, чтобы световой конус переходил в себя (т. е.  $(ct)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (ct')^2 - (x')^2 = 0$ ), то с учетом линейности получим

$$(ct')^2 - (x')^2 = \lambda(v)[(ct)^2 - x^2],$$

кроме того,  $\lambda(v)\lambda(-v) = 1$ . Сделав отражение  $x \rightarrow -x$ ,  $v \rightarrow -v$ , получаем  $\lambda(v) = \lambda(-v)$ , следовательно,  $\lambda(v) = 1$ . Из этого следует, что преобразование координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x' = \operatorname{ch} \alpha \cdot x + \operatorname{sh} \alpha \cdot ct, \\ t' = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{c} \cdot x + \operatorname{ch} \alpha \cdot t. \end{cases}$$

Подставим  $x = 0$ :

$$x' = \operatorname{th} \alpha \cdot ct' = vt'.$$

Поэтому  $\operatorname{th} \alpha = v/c$ . Итак,

$$x' = \frac{x + v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t + v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Или наоборот:

$$x = \frac{x' - v_1 t'}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}; \quad t = \frac{t' - v_1 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Найдем скорость движения системы  $K''$  относительно  $K$ , если  $K''$  движется относительно  $K'$  со скоростью  $v_2$ , проверив заодно групповой закон:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{x' + v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}; \quad t'' = \frac{t' + v_2 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \\ x'' &= \frac{x + (v_2 + v_1)t + v_2 v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2} \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}.$$

Итак, преобразования координат при переходе из одной системы отсчета в другую образуют группу — группу Лоренца.

Принцип относительности Эйнштейна утверждает, что законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца.

## Преобразование масштабов и замедление часов

**Сокращение масштаба.** Пусть неподвижный стержень длины  $L$ , координаты концов которого  $x_1 = 0$  и  $x_2 = L$ , покоятся в системе  $K$ , движущейся со скоростью  $v$  относительно системы  $K'$ . Найдем координаты  $x'_1$  и  $x'_2$  его концов в системе  $K'$  в момент времени  $t'$ . Последняя фраза, по существу, является определением: длина стержня в системе  $K'$  — это разность координат его концов в некоторый единый момент времени. Это означает, что события измерений координат концов стержня в системе  $K'$  являются одновременными. Но эти события в системе  $K$  уже не одновременны (см. рис. 1.1).

Обозначим через  $A$  и  $B$  события с координатами  $(x_A, t_A) = (0, 0)$  и  $(x_B, t_B) = (L, 0)$  в системе  $K$ , а через  $C$  — событие, задаваемое положением начала стержня в системе  $K'$  в момент времени  $t'_C =$

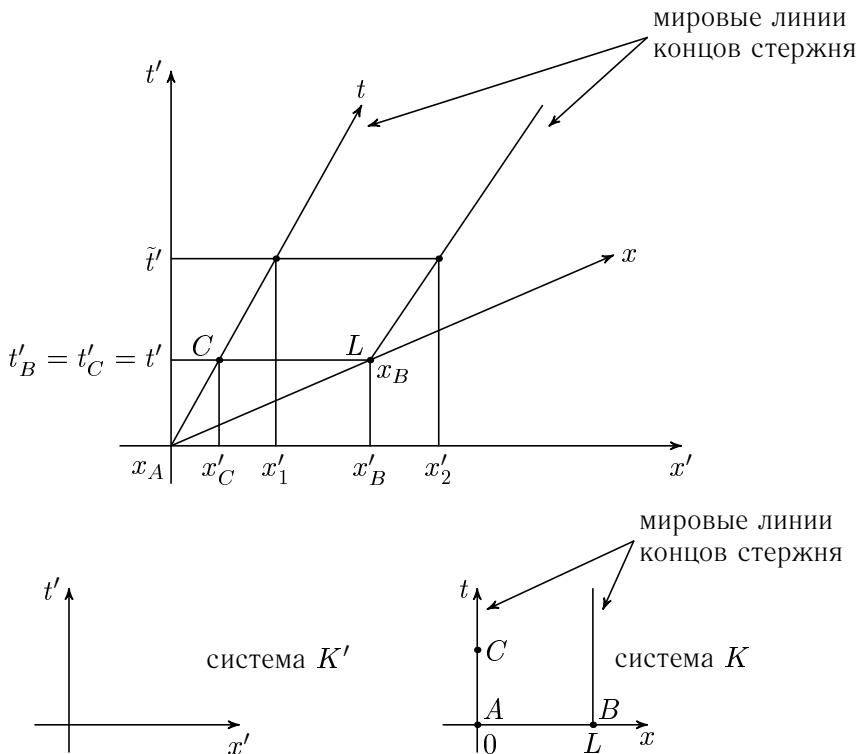


Рис. 1.1.

$= t'_B = t'$ . Из формул предыдущей лекции получаем:

$$x'_B = \frac{x_B + vt_B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$t'_B = \frac{t_B + vx_B/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{vL/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t'_C = t';$$

$$t'_C = \frac{t_C + vx_C/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad t_C = t'_C \sqrt{1 - v^2/c^2} = vL/c^2.$$

Следовательно

$$x'_C = \frac{x_C + vt_C}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{Lv^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

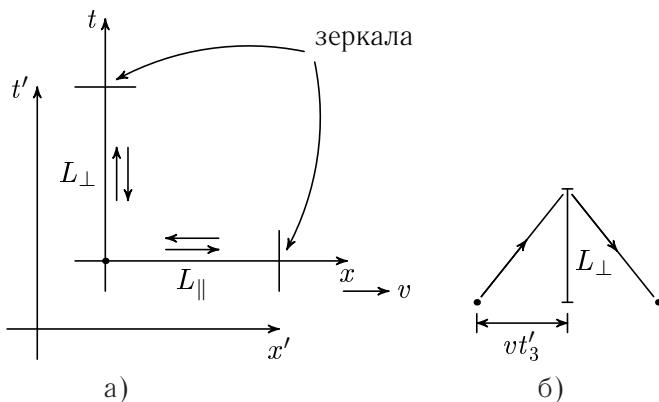


Рис. 1.2.

и

$$\begin{aligned} L' &= x'_2 - x'_1 = x'_B - x'_C = \\ &= \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{Lv^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L\sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить и другим способом.

Рассмотрим эксперимент Майкельсона в системе отсчета, движущейся параллельно одной из осей системы отсчета. В движущейся системе отсчета  $K'$  свет, пущенный в двух перпендикулярных направлениях, возвращается одновременно, ибо расстояния одинаковы и равны  $2L$  (см. рис. 1.2а),  $L_{\perp} = L_{\parallel} = L$ . При наблюдении из неподвижной системы  $K'$

$$\begin{cases} t'_1 c = L_{\parallel} + vt'_1 & (\text{свет бежит вправо}) \\ t'_2 c = L_{\parallel} - vt'_2 & (\text{свет бежит влево}); \end{cases}$$

время в перпендикулярном к движению направлении

$$t'_3 = \frac{2L_{\perp}}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Для движения в продольном направлении (см. рис. 1.2б)  $L_{\perp}^2 + v^2 t'^2_3 = c^2 t'^2_3$ ,  $t'_3 = \frac{L_{\perp}}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ . Из равенства  $2t'_3 = t'_1 + t'_2$  следует, что  $L_{\parallel} =$

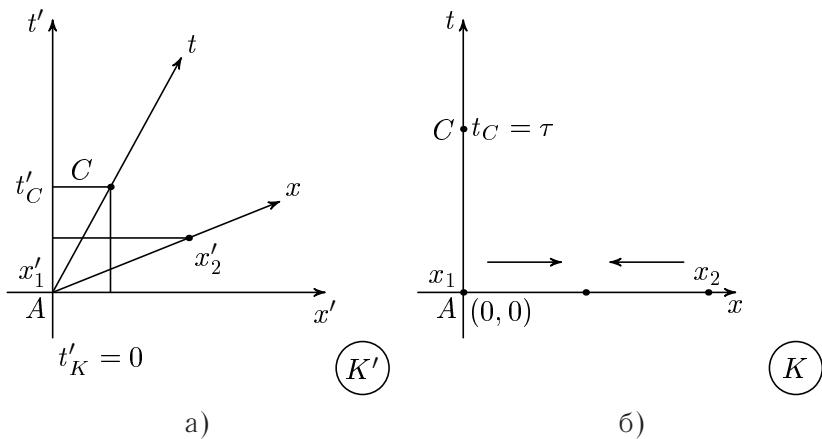


Рис. 1.3.

$= L_{\perp} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Время в продольном направлении

$$t'_1 + t'_2 = \frac{L_{\parallel}}{c+v} + \frac{L_{\parallel}}{c-v}.$$

Отсюда следует, что  $\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c}$ . Но поперечный масштаб меняться не может, ибо это противоречит принципу относительности. Действительно, возьмем два одинаковых поперечных кольца, сближающихся со скоростью  $v$ . Если, например, движущееся кольцо сжимается, то оно должно пройти внутри покоящегося. А наблюдатель, связанный с ним, увидит, что другое кольцо пройдет внутри. Абсурд. Значит,  $L_{\perp} = L$  и  $L_{\parallel} = L \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

**Удлинение времени.** Возьмем в движущейся системе  $K$  два события  $(0, 0)$  и  $(0, t_C = \tau)$  (см. рис. 1.3). Найдем  $t'_C$  и  $\tau' = t'_C - t'_A$ . (В пространстве  $(x, t)$  и  $(x', t')$  метрика не евклидова, поэтому некоторые «катеты» длиннее «гипотенуз»;  $x_1$  и  $x_2$  одновременны в  $K$ , но не одновременны в  $K'$ .) Получаем

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Удлинение времени поясняется мысленным экспериментом с часами Фейнмана. Часы образованы двумя параллельными зеркалами,

между которыми перпендикулярно бегает луч света, который издает «тик», приходя к зеркалу. Пусть часы Фейнмана движутся со скоростью  $v$  параллельно зеркалам. Скорость света для покоящегося наблюдателя и движущегося вместе с часами одинакова, а расстояние для покоящегося наблюдателя в  $\frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}$  раз больше. Во столько же раз замедляются движущиеся часы для неподвижного наблюдателя, ибо поперечная длина не меняется. Любые другие часы будут идти так же, иначе можно было бы внутри корабля измерить его скорость, что нарушает принцип относительности.

**Нарушение одновременности.** Пусть система отсчета  $K$  движется относительно системы  $K'$  со скоростью  $v$ . Пусть в точках  $X_1$  и  $X_2$  происходят одновременные события — приход сигналов, выпущенных из середины отрезка. Как отличаются времена этих событий в системе  $K'$  (см. рис. 1.3б)?

$$ct'_1 + vt'_1 = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad ct'_2 - vt'_2 = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Отсюда

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Соберем теперь все эти факты вместе.

Преобразование продольной координаты

$$x' = x \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt'.$$

Эта формула означает, что начало координат системы  $K$  движется относительно  $K'$  со скоростью  $v$ , а масштаб сжат.

Преобразование времени имеет вид

$$t' = \frac{vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Здесь первый член — сдвиг времени на движущихся часах, а второй — растяжение времени.

Подставляя  $t'$  из  $B$  в  $A$ , получаем:

$$\begin{cases} x' = \frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ t' = \frac{t+vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{cases}$$

**Преобразование скорости.** Напишем формулы для дифференциалов координат:

$$dx' = \frac{dx + v dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad dy' = dy; \quad dz' = dz; \quad dt' = \frac{dt + v dx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Получаем:

$$v'_x = \frac{v_x + v}{1 + v_x v/c^2}; \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_x v/c^2}; \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_x v/c^2}.$$

Другой вывод формул преобразования скоростей был приведен вместе с выводом преобразований Лоренца.

## Пространство Минковского

Положим  $x_0 = ct$ . *Пространство Минковского* — это псевдоевклидово пространство  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  с метрикой  $l^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ . Расстояние между двумя точками в такой метрике называют *интервалом*. *Группа Лоренца* — это группа движений этого пространства. Точка этого пространства (мировая точка) — *событие*. *Мировая линия* — траектория частицы.

Интервалы на световом конусе ( $l^2 = 0$ ) называют *световыми*, внутри конуса ( $l^2 > 0$ ) — *времениподобными*, вне конуса ( $l^2 < 0$ ) — *пространственноподобными*. Для любого времениподобного интервала можно выбрать инерциальную систему отсчета так, что эти события оказываются в одном месте, но в разное время. Пространственноподобные интервалы заменой системы координат можно перевести в одновременные, но в разном месте.

## Принцип относительности

Принцип относительности Эйнштейна утверждает, что законы природы инвариантны при переходе из одной инерциальной системы координат в другую, при этом координаты преобразуются согласно преобразованиям Лоренца.

Этот принцип все время проверяется — все вновь открываемые законы физики должны удовлетворять принципу относительности

Эйнштейна; если будет открыт закон, не удовлетворяющий принципу Эйнштейна, принцип придется пересмотреть.

С другой стороны, этот принцип играет эвристическую роль, ограничивая форму уравнений движения.

**Структура пространства-времени.** Сравним две структуры пространства-времени — галилеевскую и релятивистскую. В каждой из них события параметризуются точками четырехмерного пространства, параллельные переносы которого образуют  $\mathbb{R}^4$ .

В галилеевской структуре определено линейное отображение  $t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  — время. Если события одновременны ( $t(b) - t(a) = 0$ ), между ними определено евклидово расстояние, т. е. множество одновременных событий образуют  $\mathbb{R}^3$ . И временное, и пространственное расстояния сохраняются при преобразованиях Галилея.

В релятивистском случае между каждыми двумя событиями  $a$  и  $b$  определен интервал  $(a^0 - b^0)^2 - (a^1 - b^1)^2 - (a^2 - b^2)^2 - (a^3 - b^3)^2$ . Группа Пуанкаре состоит из аффинных преобразований, сохраняющих этот интервал.

## Аберрация

Выпишем еще раз преобразования Лоренца в случае, если вторая система отсчета движется относительно первой со скоростью  $u$  в направлении оси  $x$ .

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - Ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Формулы преобразования скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x + u}{1 + v_x u/c^2}; \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x u/c^2}; \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x u/c^2}.$$

Пусть  $v_z = v'_z = 0$ ,  $v_x = v \cdot \cos \Theta$  и  $v_y = v \cdot \sin \Theta$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v \sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sin \Theta}{v \cdot \cos \Theta + u}.$$

В частности, если  $v = c$ , то

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sin \Theta}{\cos \Theta + u/c},$$

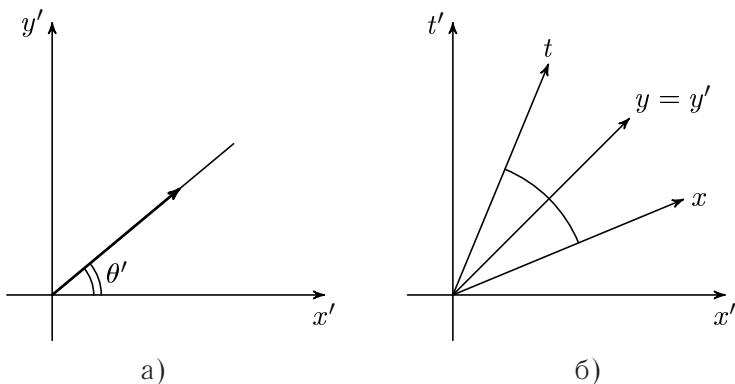


Рис. 1.4.

или

$$\sin \Theta' = \frac{v_y'}{c} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sin \Theta}{1 + \cos \Theta \cdot u/c}.$$

Пусть  $u/c \ll 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sin \Theta' &= \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sin \Theta}{1 + \cos \Theta \cdot u/c} \approx \sin \Theta \cdot (1 - u^2/2c^2) \times \\ &\times (1 - \cos \Theta \cdot u/c) \approx \sin \Theta \left( 1 - \frac{u}{c} \cdot \cos \Theta - \frac{u^2}{c^2} \right), \\ \Theta - \Theta' &= -\frac{u}{c} \sin \Theta - \frac{u^2}{2c^2} \cdot \operatorname{tg} \Theta. \end{aligned}$$

Здесь  $\Theta$  — угол, например, на земле, а  $\Theta'$  — угол относительно Солнца.Множество преобразований, сохраняющих форму  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ , состоит из четырех связных компонент, а именно:

- 1) Связная компонента единицы.
- 2) Связная компонента пространственного отражения  $P: x^i \rightarrow -x^i, x^0 \rightarrow x^0$  (латинскими буквами обозначаются пространственные координаты 1, 2, 3, а греческими буквами — все координаты).
- 3) Связная компонента обращения времени  $T: x^i \rightarrow x^i, x^0 \rightarrow -x^0$ .
- 4) Связная компонента преобразования  $PT$ .

Каждому вектору  $x^\mu$  поставим в соответствие эрмитову матрицу размера  $2 \times 2$ :

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x^0 \mathbb{1} + x^i \sigma^i.$$

При изменении системы отсчета эта матрица преобразуется по правилу  $\hat{x}' = U^+ \hat{x} U$ , где  $U \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Очевидно, что для каждого собственного преобразования Лоренца (преобразований из связной компоненты единицы) существуют два элемента  $U \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  и тем самым получается двумерное представление группы Лоренца  $\psi \mapsto U\psi$  где  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  — двухкомпонентный спинор Вейля.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (уравнение Вейля)  $(\partial_0 + \sigma^i \partial_i)\psi = 0$ . Это уравнение инвариантно относительно собственных преобразований Лоренца.

Поскольку физики до пятидесятых годов XX века считали, что в природе имеется инвариантность относительно полной группы Лоренца, включающей отражения, то вместо этого уравнения рассматривались другие уравнения (уравнения Дирака):

$$\begin{cases} (\partial_0 + \sigma^i \partial_i)\psi = m\bar{\psi}, \\ (\partial_0 - \sigma^i \partial_i)\bar{\psi} = m\psi. \end{cases}$$

Уравнения Дирака инвариантны относительно  $P$  ( $P\psi = \bar{\psi}$ ). Физический смысл  $m$  — масса, и эти уравнения описывают электроны.

**Отступление.** В 1956 году было открыто, что зеркальная симметрия  $P$  нарушается при слабом взаимодействии. Тогда Ландау предположил (и это подтвердилось), что нейтрино (у которого  $m = 0$ ) описывается уравнением Вейля, а в зеркале мы видим антинейтрино. Нейтрино удовлетворяет  $CP$ -симметрии, где  $C$  — замена частицы на античастицу.

Вместо прямого произведения симметрий реализуется их комбинация.

## Энергия и импульс релятивистской частицы

Важную роль в физике играют законы сохранения. В классической механике частицы обладают импульсом  $\vec{p} = m\vec{v}$  и энергией  $E = \frac{m\vec{v}^2}{2}$ .

Очевидно, они сохраняются при движении одной частицы. Более того, сумма таких величин сохраняется и при столкновениях. Такие величины называют интегралами движения.

Однако при преобразованиях Лоренца эти величины не преобразуются так, как должны преобразовываться. Поэтому они интегралами движения быть не могут.

Постулируем (пока), что и в релятивистском случае частица обладает четырьмя первыми интегралами, причем  $E$  — скаляр относительно вращений, а  $\vec{p}$  — вектор при вращениях.

Импульс должен быть вектором, одинаковым по направлению со скоростью, а величина его должна зависеть только от величины скорости. Таким образом,  $\vec{p} = m(v^2)\vec{v}$ , где  $m$  — некоторая функция. Аналогично  $E = E(v^2)$ .

Проведем следующий мысленный эксперимент. Наблюдатели  $K$  и  $K'$ , расположенные в плоскости  $Oxy$ , движутся друг относительно друга с относительной скоростью  $v$  по оси  $x$ . Они бросают вдоль координаты  $y$  одинаковые шары с одинаковой по величине скоростью  $u$  так, чтобы произошло лобовое столкновение этих шаров.

Рассмотрим скорости шаров в системе координат, в которой  $K$  покоится. До столкновения:  $v_x^A = 0$ ,  $v_x^B = v$ ,  $v_y^A = u$ ,  $v_y^B = -u\sqrt{1-v^2/c^2}$ . После удара:  $\tilde{v}_x^A = 0$ ,  $\tilde{v}_x^B = v$ ,  $\tilde{v}_y^A = -u'$ ,  $\tilde{v}_y^B = u'\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Так как должно быть  $p_x^A + p_x^B = \tilde{p}_x^A + \tilde{p}_x^B$ , имеем

$$v \cdot m \left( v^2 + u^2 - \frac{u^2 v^2}{c^2} \right) = v \cdot m \left( v^2 + (u')^2 - \frac{(u')^2 v^2}{c^2} \right),$$

поэтому, если  $m$  взаимно однозначна,  $u = u'$  или  $u = -u'$ . Также должно выполняться равенство  $p_y^A + p_y^B = \tilde{p}_y^A + \tilde{p}_y^B$ . Это значит, что

$$m(u^2) - \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot m \left( v^2 + (u')^2 - \frac{(u')^2 v^2}{c^2} \right) = 0.$$

Подставив  $u = 0$ , получаем

$$m(v^2) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Величина  $m(0) = m$  называется массой покоя. Следовательно, импульс равен

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

При изменении системы координат импульс преобразуется следующим образом:

$$p'_x = \frac{m \frac{v+u}{1+vu/c^2}}{\sqrt{1 - \frac{(v/c+u/c)^2}{(1+uv/c^2)^2}}} = \frac{mv + mu}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{p_x + uE/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

где

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad E' = \frac{E + up}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Таким образом,  $(E, \vec{p})$  — 4-вектор. При малых  $v$

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Заметим, что  $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ ,  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ . Интервал:  $(\Delta l)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$ .

Пусть  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , тогда  $(\Delta l)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$ .

Физики используют запись (придуманную Эйнштейном), согласно которой по повторяющимся индексам происходит суммирование. Кроме того, обычно греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — только 1, 2, 3.

Линейные преобразования, сохраняющие интервал  $(\Delta l)^2$ , называются *преобразованиями Лоренца*:  $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = a_\nu^\mu x^\nu$  (так физики записывают умножение вектора  $(x^\nu)$  на матрицу  $(a_\nu^\mu)$ , здесь  $\mu$  — номер строки,  $\nu$  — номер столбца).

Аффинные преобразования  $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = a_\nu^\mu x^\nu + b^\mu$ , где  $(a_\nu^\mu)$  из группы Лоренца, называются *преобразованиями Пуанкаре*.

Вектором называется любая величина, имеющая 4 компоненты координаты,  $A^\mu$ , которая при переходе в другую систему координат преобразуется как вектор

$$A^\mu \mapsto \tilde{A}^\mu = a_\nu^\mu A^\nu.$$

Ковектором называется величина  $B_\mu$ , преобразующаяся по правилу

$$\tilde{B}_\mu \mapsto B_\mu = a_\mu^\nu \tilde{B}_\nu.$$

Ковектор — это на самом деле элемент двойственного пространства.

Величина, преобразующаяся как произведение координат,  $A^{\mu\nu} \mapsto \tilde{A}^{\mu\nu} = a_{\mu_1}^\mu a_{\nu_1}^\nu A^{\mu_1 \nu_1}$ , называется 2-вектором или тензором типа  $(2, 0)$ .

**Пример.** Метрика  $g_{\mu\nu}$  при преобразовании координат меняется следующим образом:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{x}^\mu \tilde{x}^\nu = \tilde{g}_{\mu\nu} a_{\mu_1}^\mu a^{\mu_1} a_{\nu_1}^\nu a^{\nu_1} = (\tilde{g}_{\mu\nu} a_{\mu_1}^\mu a_{\nu_1}^\nu) x^{\mu_1} x^{\nu_1} = g_{\mu_1 \nu_1} x^{\mu_1} x^{\nu_1},$$

следовательно,  $g_{\mu_1 \nu_1} = \tilde{g}_{\mu\nu} a_{\mu_1}^\mu a_{\nu_1}^\nu$ , и следовательно,  $g_{\mu\nu}$  — 2-ковектор или тензор типа  $(0, 2)$ .

Обозначение  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$  закреплено за стандартным антисимметрическим тензором ранга 4. Антисимметричность означает, что его компоненты меняют знак при перестановке любой пары индексов, кроме того,  $\epsilon_{0123} = 1$ . Рангом называется число индексов тензора. В этих обозначениях форма объема равна  $dV = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma$ . Дуальным тензором называется тензор, свернутый с  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ .

**Пример.** Пусть  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$  — антисимметричный тензор. Тогда  $(*F)$  по определению равен:  $F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$ , где  $F^{\lambda\sigma} = g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu}$  и  $(g^{\lambda\mu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$ .

Пусть  $(x^\mu)$  и  $(\tilde{x}^\mu)$  — локальные координаты в точке и  $\tilde{x}^\mu = a_\nu^\mu x^\nu$ . Скалярное поле — это функция от  $x$   $\varphi(x) \mapsto \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x)$ . Векторное поле — это сечение касательного расслоения  $A^\mu(x) \mapsto \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = a_\nu^\mu A^\nu(x)$ .

## 2. Лагранжева механика

### Состояние классической системы, изменение ее во времени

В евклидовой системе координат положение частицы в системе определяется декартовыми координатами  $x_\alpha^i$ , где  $\alpha = 1, \dots, N$  — номера

частиц. Таким образом,  $3N$  величин задают положение частиц. В общем случае *обобщенные координаты* — это некие переменные  $q_i$ , задающие положения частиц в системе. Все возможные положения частиц или значений  $q_i$  в общем случае образуют *конфигурационное пространство*. Значения координат не определяют скоростей механической системы и не задают будущего.

*Состояние* задается значениями координат  $x_\alpha^i$  и их производными по времени в данной точке — скоростями  $\dot{x}_\alpha^i$ . Все возможные состояния системы или значения  $(q_i, \dot{q}_i)$  образуют *фазовое пространство*. Если состояние задано, то определяется будущее и прошлое системы с помощью уравнений движения (например, уравнений Ньютона).

### Примеры:

$$1) m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ — уравнение свободной частицы.}$$

$$2) m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ — уравнение шарика на пружине.}$$

Лагранж придал этим уравнениям в случае потенциальных сил форму

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$  в примере 1 и  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$  в примере 2, причем  $\frac{kx^2}{2}$  — потенциальная энергия.

## Телеологический принцип

Почему в однородной среде свет распространяется по прямой? Можно дать следующий ответ: потому что время, затрачиваемое им в этом случае, минимально. Это подтверждается также при преломлении. В этом случае свет, добиваясь минимизации суммарного времени, предпочитает пройти больше по тому участку, где его скорость выше, чтобы сэкономить там, где его скорость меньше.

«Все к лучшему в этом лучшем из миров» — провозглашает *телеологический принцип*. Свет, и вообще любая система, идет по такому пути, чтобы сделать «нечто» наименьшим. Это «нечто» есть

действие  $S$ , функционал от траектории

$$S^{\text{реальное}} = \min S.$$

В классической теории будущее состояние однозначно предопределено настоящим, поэтому мы не можем одновременно допускать это и верить в то, что существует свобода воли (один из важнейших принципов христианства).

В квантовой теории этого противоречия нет. Оказывается, что система идет сразу по многим траекториям. При этом амплитуда вероятности того, что система перейдет из точки  $A$  в точку  $B$  равна  $\int e^{iS/\hbar}$ , где интеграл берется по множеству всех траекторий, соединяющих  $A$  и  $B$ , а  $S$  — действие на данной траектории. Классические уравнения получаются, когда  $\hbar \rightarrow 0$ . В результате интерференции усиливаются траектории вблизи классической. Теперь будущее не однозначно определяется настоящим, и противоречия с принципом свободы воли нет.

## Вариационное исчисление и принцип наименьшего действия

Вариационное исчисление занимается нахождением экстремумов функций, область определения которых — бесконечномерное пространство (пространство кривых). Такие функции называют *функционалами*.

Исторически первой серьезной задачей вариационного исчисления была задача о линии наискорейшего спуска: по какой кривой, соединяющей две данные точки, должно двигаться тело в поле силы тяжести, чтобы время спуска было наименьшим? Напишем функционал, минимум которого — нужная кривая.

Маленький кусочек траектории длины  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  проходится за время  $\sqrt{dx^2 + dy^2}/v$ , где  $v$  — скорость. Скорость можно найти из закона сохранения энергии:  $\frac{mv^2}{2} + mgy = mgh$ . Поэтому  $v = \sqrt{2g(h - y)}$ . Итак, нам надо минимизировать функционал

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{h - y}} dx.$$

Другая задача с заранее известным ответом: кривая наименьшей длины, соединяющая две данные точки. Длина кривой  $y = f(x)$  задается формулой  $\Phi(f(x)) = \int \sqrt{1 + (df/dx)^2} dx$ . Функционал можно представлять как функцию от бесконечного числа переменных: у функции  $\Phi(f_1, \dots, f_n)$  увеличивается число аргументов, и аргумент  $f_i$  постепенно превращается в  $f(x)$ .

Мы будем заниматься только *дифференцируемыми функционалами*, т. е. такими функционалами  $\Phi$ , что  $\Phi(f + h) - \Phi(f) = F(f, h) + R(f, h)$ , где  $F(f, h)$  зависит от  $h$  линейно, а  $R(f, h) = O(h^2)$ , т. е. из  $|h| < \varepsilon$  и  $\left|\frac{dh}{dx}\right| < \varepsilon$  следует, что  $|R| < C\varepsilon^2$ . Функционал  $F$  называют *дифференциалом*, или *первой вариацией*.

Пусть для всех функций  $h(x)$  функция  $\Phi(q(x) + \varepsilon h(x))$  имеет минимум при  $\varepsilon = 0$ . Это значит, что первая вариация  $F(q, h) = \frac{d\Phi(q + \varepsilon h)}{d\varepsilon}$  равна нулю для всех функций  $h(x)$ . В этом случае функцию  $q$  называют *экстремалью* функционала  $\Phi$ .

В лагранжевой динамике мы будем рассматривать только функционалы вида  $A(q(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ , где  $L$  — обыкновенная функция (а не функционал) от нескольких переменных. Такой функционал является дифференцируемым. Действительно,

$$\begin{aligned} F(x, h) &= \frac{d}{d\varepsilon} A(x(t) + \varepsilon h(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} L(x(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \cdot \frac{d}{dt} h(t) \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) \cdot h(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) h(t) \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h(t) \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \cdot h(t) dt + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) h(t) \right) \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

**Теорема.** Экстремали такого функционала подчиняются уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

*Доказательство.* Так как мы оставляем неподвижными концы  $x(t)$ , то  $h(t_0) = 0$  и  $h(t_1) = 0$ . Поэтому для всех  $h$  должно выполняться следующее равенство:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h(t) dt = 0. \quad (1.1)$$

Но если не выполнено уравнение Эйлера–Лагранжа, т. е. если существует  $t_2$  такое, что

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) (t_2) \neq 0,$$

мы можем взять функцию  $h$ , почти везде равную 0, а в окрестности точки  $t_2$  принимающую очень большие значения. Для такой  $h$  интеграл (1.1) не будет равен 0. Противоречие.

## Уравнения Лагранжа

Все это нужно нам потому, что теперь мы можем доказать принцип наименьшего действия и переформулировать уравнения Ньютона в виде уравнений Эйлера–Лагранжа. Действительно, уравнения движения Ньютона для потенциальных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt} m \dot{x}_\alpha^i = F_\alpha^i = - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha^i}.$$

Введем функцию  $L = T - U$  (лагранжиан), где

$$T = \sum_\alpha \sum_i \frac{m(\dot{x}_\alpha^i)^2}{2}.$$

( $\alpha$  — номер частицы). Элементарно проверяется, что уравнения Ньютона можно переписать в виде уравнений Эйлера—Лагранжа. Следовательно, это уравнение задает экстремаль функционала действия

$$A(x_\alpha^i(t), \dot{x}_\alpha^i(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_\alpha^i(t), \dot{x}_\alpha^i(t)) dt.$$

Итак, принцип наименьшего действия доказан.

В уравнениях в форме Эйлера—Лагранжа можно делать произвольные замены координат  $x_\alpha^i \rightarrow q_\alpha$ , и от этого вид этих уравнений не изменится. В самом деле, экстремальность траектории не зависит от того, в каких координатах мы работаем. Уравнения Ньютона не обладают таким свойством. Величины  $q_\alpha$  называют обобщенными координатами, а величины  $\dot{q}_\alpha$  — обобщенными скоростями. Координаты и скорости задают состояние системы.

## Интегралы движения и симметрии

Принцип наименьшего действия позволяет связывать интегралы движения с симметриями.

*Интегралы движения* — это функции состояния  $I$ , сохраняющиеся при движении, т. е.  $\frac{d}{dt}I(q, \dot{q}) = 0$ .

**Примеры** первых интегралов:

1. Свободная частица:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ . Интегралы:  $P = m\dot{x}$ ,  $E = \frac{m(\dot{x})^2}{2}$ .

2. Пусть  $\frac{\partial}{\partial t}L = 0$ . Рассмотрим величину  $\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$  (здесь, как и в дальнейшем, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) &= \frac{d^2 q^i}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d^2 q^i}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \cdot \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ &= \frac{d}{dt} L(q(t), \dot{q}(t)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right) = 0$$

и мы получили первый интеграл — энергию

$$E = q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \text{const.}$$

*Симметриями* называют однопараметрические группы преобразований конфигурационного пространства

$$q^i \rightarrow f^i(q, \varepsilon), \quad f^i(q, 0) = q^i,$$

сохраняющие лагранжиан. В принципе можно рассматривать и более сложные симметрии.

**Теорема (Нётер).** Каждой симметрии соответствует первый интеграл

$$I(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot h^i(q), \quad \text{где } h^i(q) = \frac{\partial f^i}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot h^i \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \cdot h^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \dot{h}^i = \frac{\partial L}{\partial q^i} \cdot h^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \dot{h}^i = \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{\partial \dot{f}^i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{dL(f(q, \varepsilon), \dot{f}(q, \varepsilon))}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \end{aligned}$$

так как каждая симметрия сохраняет лагранжиан.

Пусть у нас есть несколько тел и их потенциальная энергия  $U$  зависит только от разностей  $\vec{x}_a - \vec{x}_b$ . Тогда преобразование  $\vec{x}_a \rightarrow \vec{x}_a + \vec{\varepsilon}$  — симметрия, а

$$p^k = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^k} = \sum_a m_a \dot{x}_a^k$$

является импульсом (первым интегралом, соответствующим этой симметрии).

Пусть имеется несколько тел, и  $U$  является функцией от расстояний  $|\vec{x}_a - \vec{x}_b|$ . Тогда кроме параллельных переносов есть еще один набор симметрий — повороты:

$$x_a^i \rightarrow x_a^i + \omega^k \varepsilon_{kl}^i x_a^l.$$

Этой симметрии соответствует интеграл движения

$$M^k = \sum_a \varepsilon_{il}^k \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^l} \cdot x_a^l = \varepsilon_{il}^k \sum_a p_a^i \cdot x_a^l = [\vec{p}, \vec{x}]^k,$$

называемый моментом количества движения.

## Примеры систем

**Пример 1.** Свободная нерелятивистская частица:

$$L = \frac{m(\dot{x}^i)^2}{2}.$$

Приведем некоторые симметрии и соответствующие им интегралы движения.

- (а) Параллельные переносы  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{\varepsilon}$ ,  $p^k = m\dot{x}^k = \text{const.}$
- (б) Повороты  $x^i \rightarrow x^i + \omega^k \varepsilon^{ikl} x^l$ ,  $M = [\vec{p}, \vec{x}] = \text{const.}$
- (в) Перенос во времени,  $E = \frac{m(\dot{x}^i)^2}{2} = \text{const.}$

**Пример 2.** Рассмотрим две частицы в трехмерном пространстве, причем силы зависят только от расстояния:

$$L = \frac{m_1(\dot{x}_1)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2)^2}{2} - u(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$

Введем координаты

$$\vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2.$$

Пусть  $M = m_1 + m_2$ , величина  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  называется приведенной массой. В случае  $m_1 \ll m_2$  имеем  $M \approx m_2$ ,  $m \approx m_1$ .

Ясно, что  $L = \frac{M \dot{X}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{2} - U(|\vec{x}|) = L_1 + L_2$ , где  $L_1 = \frac{M \dot{X}^2}{2}$ ,  $L_2 = \frac{m \dot{x}^2}{2} - u(|\vec{x}|)$ .

Мы видим, что такое движение распадается на два — движение свободной частицы и движение частицы в радиальном силовом поле. Исследуем последнее движение.

В этом случае сохраняются энергия  $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(|\vec{x}|)$  и момент количества движения относительно  $\vec{x} = 0$ , т. е. величина  $\vec{M} = [\vec{x}, \vec{p}]$ . Так как  $\vec{x} \perp \vec{M}$  и  $\vec{M} = \text{const}$ , движение происходит в плоскости. Введя в ней координаты  $r$  и  $\varphi$ , получаем

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Из конкретного вида  $L$  следует, что  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$ . Такая координата называется *циклической*. Поэтому

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = M = \text{const}.$$

$\frac{1}{2}r \cdot r\dot{\varphi}$  — площадь сектора, пройденная за единицу времени. Итак, секториальная скорость постоянна. Это *второй закон Кеплера*.

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{ef}}(r),$$

где  $U_{\text{ef}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$  называется *эффективной потенциальной энергией*. Поэтому

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(E-U) - M^2/mr}},$$

$$\Delta\varphi = \int \frac{(M/r^2) dr}{\sqrt{2(E-U) - M^2/mr^2}}.$$

Расстояние до центра колеблется между  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  ( $r$  может быть только таким, что  $U_{\text{ef}}(r) < E$ ). Но, вообще говоря, траектории при таком движении незамкнуты,  $\Delta\varphi \neq 2\pi n$ .

В случае  $U(r) = kr^2$  орбиты замкнуты.

**Пример 3.** Частица в кулоновском поле. Это частный случай предыдущего примера.  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  — кулоновский потенциал. В частности, это случай гравитации.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \alpha/r.$$

В этом случае есть скрытая симметрия с группой  $O(4)$  и дополнительные три интеграла движения

$$\vec{K} = [\vec{v}, \vec{M}] + \frac{\alpha \vec{r}}{r} = mv^2 \vec{r} - m\vec{v}(\vec{v}, \vec{r}) + \frac{\alpha \vec{r}}{r},$$

$$\vec{K} = m\vec{r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - m\vec{v}r\dot{r} + \frac{\alpha \vec{r}}{r}.$$

Существование этого интеграла показывает, что орбита замкнута. Действительно, в момент, когда  $\dot{r} = 0$ , имеем  $\vec{r} \parallel \vec{K}$ , т. е. перигелий не смещается.

Докажем третий закон Кеплера. Уравнение движения планеты имеет вид

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\alpha \vec{r}}{r^3}.$$

Если мы заменим  $t$  на  $\mu t$ , а  $\vec{r}$  на  $\lambda \vec{r}$ , причем  $\mu^2 = \lambda^3$ , уравнение сохраняется. Из этого следует, что  $T^2 = \gamma r^3$ .

**Пример 4.** Осциллятор.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Такому уравнению удовлетворяют шарики на пружине, маятники. Имеется симметрия  $x \rightarrow \lambda x$ . Из нее следует независимость периода колебаний такого маятника от амплитуды.

**Пример 5.** Системы связанных осцилляторов.

$$L = \sum \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - \sum \frac{k(x_i - x_{i+1})^2}{2}.$$

**Пример 6.** Релятивистская частица.

В этом случае траектория лежит в четырехмерном пространстве-времени  $(ct, x^1, x^2, x^3) = x^\nu$ . Траектории должны переходить в траектории при преобразованиях Лоренца. Для этого достаточно, чтобы действие было лоренц-инвариантно. Мы можем выбрать на кривой в качестве параметра  $t$ . Тогда простейшее лоренц-инвариантное действие имеет вид

$$S = m \int \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} = mc^2 \int \sqrt{1 - (dx^i/dt)^2/c^2} dt.$$

Легко доказать, что экстремали этого действия (на самом деле на этих траекториях достигается минимум) — прямые.

Итак, лагранжиан  $L = -mc^2\sqrt{1 - (\dot{x}/c)^2}$ . Уравнения Эйлера—Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}.$$

Так как  $\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$ , импульс  $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const.}$

Энергия имеет вид  $E = \dot{x}^i p_i - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ . При малых  $v$  энергия равна  $mc^2 + \frac{m\vec{v}^2}{2}$ . Первое слагаемое в этой сумме  $E = mc^2$  можно интерпретировать как внутреннюю энергию. А вектор  $p^i = (E/c, \vec{p})$  является 4-вектором, т. е. величина  $(p^i)^2 = m^2$  сохраняется при преобразованиях Лоренца.

Структура пространства-времени — это вопрос не геометрии, а физики. Фактически, это вопрос о группе инвариантности уравнений движения. Его нельзя решить без эксперимента.

### 3. Уравнения теории поля

Для возникновения теории поля имеются две причины. Первая причина состоит в том, что мы можем рассматривать системы с бесконечным числом степеней свободы. Система с конечным числом степеней свободы описывается обобщенными координатами  $q_i(t)$  и обобщенными скоростями  $\dot{q}_i(t)$ . Если число координат становится континуальным, мы начинаем иметь дело с полем  $\varphi(x, t)$ , где непрерывная величина  $x$  играет роль индекса  $i$ .

Например, колеблющаяся струна состоит из очень большого, фактически бесконечного, числа атомов, непрерывно распределенных вдоль нее, и каждый из них совершает колебания. В этом случае  $x$  — номер (координата) атома, а  $\varphi(x, t)$  — амплитуда его колебания в момент времени  $t$ .

Вторая причина — существование предельной скорости ( $c$ ). Из-за этого энергия взаимодействия должна перемещаться между источником и объектом взаимодействия, т. е. где-то помещаться. Это «где-то» и есть поле.

Возмущение поля в некотором месте вызывает изменения поля в соседних точках, которые, в свою очередь, распространяются дальше. Так в течение конечного времени осуществляется дальнодействие.

Законы поля представляются уравнениями в частных производных.

В случае электромагнитного поля сила, действующая на точечную заряженную частицу, определяется полем непосредственно в этой точке, и, наоборот, присутствие заряженной частицы изменяет поле во всем пространстве.

*Поле* — одна из главнейших идей новой физики, наряду с релятивистским и квантовым принципами.

**Пример.** Струна.

Пусть  $\varphi(x)$  — отклонение точки струны с координатой  $x$ .  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  — ускорение точки с координатой  $x$ . По закону Гука

$$\rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = k[(\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)) - (\varphi(x) - \varphi(x - \Delta x))].$$

Разделив на  $\Delta x$  и перейдя к пределу, получаем

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \text{где } \lambda = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \Delta x.$$

Это простейшее уравнение поля.

Мы хотим описать динамику поля с помощью принципа наименьшего действия. Действие имеет вид

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L dt.$$

Но в этом случае лагранжиан  $L$  — функция от  $\varphi(x, t)$ ,  $\dot{\varphi}(x, t)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ .

В частности, в случае струны лагранжиан имеет вид

$$L = \int \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \lambda \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Поэтому действие можно переписать в виде

$$A = \int \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_x) dx dt, \quad (1.2)$$

$\mathcal{L}$  называют *плотностью лагранжиана*; в случае струны она имеет вид

$$\mathcal{L} = \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \lambda \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Понятие вариации и экстремали легко можно обобщить на случай теории поля. В случае, если действие имеет вид (1.2), экстремали подчиняются следующему обобщению уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.$$

В случае струны это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( 2\rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0.$$

Мы видим, что это уравнение совпадает с уравнением струны при постоянных  $\rho$  и  $\lambda$ . Это значит, что решения уравнения струны действительно являются экстремалями нашего функционала действия.

Уравнения Максвелла также могут быть записаны в виде принципа наименьшего действия. Релятивистская инвариантность ограничивает вид рассматриваемых лагранжианов.

Существует общий *принцип инвариантности*: если мы хотим, чтобы экстремали были инвариантны относительно некоторой группы преобразований, достаточно, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно этой группы.

Напишем простейший лоренц-инвариантный лагранжиан. Пусть  $\varphi(x, t)$  — скаляр относительно преобразования Лоренца (это означает, что  $\varphi'(x', t') = \varphi(x, t)$ , если  $(x', t')$  получается из  $(x, t)$  преобразованием Пуанкаре). Пусть действие равно

$$S = \int \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - m^2 \varphi^2 \right] dx dt.$$

**Теорема.** Действие  $S$  инвариантно относительно преобразований Лоренца, т. е.  $S[\varphi] = S[\varphi']$ .

Действительно, градиент  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}$  — вектор, сохраняющийся при преобразованиях Лоренца. Квадрат этого вектора  $(\partial_\mu \varphi)^2 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$  —

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$ , а следовательно и  $\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)^2 - m^2\varphi^2$  — скаляр. Форма объема тоже лоренц-инвариантна. Уравнение для экстремалей этого действия:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - m^2 \varphi = 0$$

также лоренц-инвариантно. Его называют *уравнением Клейна–Гордона*.

## Пространственно-временные симметрии и тензор энергии-импульса

Если лагранжиан лоренц-инвариантен, то существует сохраняющийся тензор энергии-импульса, выражающийся через  $\varphi$  и его производные, причем:

- 1)  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ ;
- 2)  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Пусть  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$  — лоренц-инвариантная плотность лагранжиана, зависящая от нескольких тензорных полей  $\varphi$ . Это значит, что действие

$$A[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) d^4x$$

инвариантно относительно преобразований  $x \rightarrow x + \varepsilon$  при  $\varepsilon = \text{const}$  или  $\varepsilon^\mu = \omega^{\mu\nu}x^\nu$ . Рассмотрим вариацию функционала  $A$  при бесконечно малом преобразовании такого вида для произвольного  $\varepsilon$ . Она имеет вид

$$\delta A = \int \partial_\mu \varepsilon_\nu \cdot T^{\mu\nu}(x) d^4x.$$

Это следует из того, что вариация должна быть линейна по  $\varepsilon$  и исчезать в случае  $\partial_\mu \varepsilon_\nu = 0$  — постоянных  $\varepsilon$ .

Из лоренц-инвариантности следует, что  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ . Для уравнений движения

$$\delta A = \int \partial_\mu \varepsilon_\nu T^{\mu\nu} d^4x = - \int \varepsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} d^4x = 0.$$

Ввиду произвольности  $\varepsilon$ ,  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

**Пример 1.** Если

$$S = \int [(\partial_\mu \varphi)^2 - m^2 \varphi^2] d^4x,$$

то

$$T^{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \cdot \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} [(\partial_\mu \varphi)^2 - m^2 \varphi^2].$$

**Пример 2.** Если

$$S = \int (\partial_\mu \bar{\psi} \cdot \partial_\mu \psi - m^2 \bar{\psi} \psi) d^4x,$$

то

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\psi} \cdot \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} L.$$

## Электромагнетизм

*Электрическое поле.* К его открытию привели невинные опыты с эbonитовыми палочками, а также наблюдения и небезопасные эксперименты над грозными погодными явлениями. На современном языке сила, с которой действует электрическое поле, связана с напряженностью  $\vec{E}$  следующей формулой:

$$\vec{F} = e \vec{E},$$

где  $e$  — заряд,  $\vec{E}$  — электрическое поле.

*Магнитное поле.* Магнит в природе открыт давно. Компас изобретен китайцами более 1000 лет назад. Магнит действует на магнит и на проводник с током. Это значит, что поле магнита действует на движущийся электрический заряд. Это уже зародыш объединения электричества и магнетизма. В современной форме эти законы выражаются в форме закона Лоренца для силы  $\vec{F} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]$ . Итак,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}].$$

## Уравнения Максвелла

1) *Закон Гаусса.* Силовые линии электрического поля начинаются и кончаются на зарядах. Поток электрического поля через поверхность равен заряду внутри ее, т. е.

$$\int_{\partial D} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = 4\pi \int_D \rho dv,$$

где  $\rho$  — плотность электрического заряда.

Раньше все законы записывались примерно в такой форме — в форме интегралов. Первое, что сделал Максвелл, — это переписал уравнения в дифференциальной форме, и их стало проще анализировать:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

2) *Отсутствие магнитных монополей.* Никто не мог отрезать у магнита полюс: отрежешь полюс, думаешь, остался только один — но нет, их опять два. Силовые линии магнитного поля нигде не начинаются и нигде не кончаются. Это значит, что отсутствуют магнитные монополи, т. е.

$$\int_{\partial D} \vec{H} d\vec{S} = 0,$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

3) *Индукция Фарадея — начало объединения.* Если магнит движется внутри замкнутого проводящего контура, то в контуре возникает ток. Циркуляция электрического поля равна

$$\oint_{\partial \Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{S},$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{H}}{dt}.$$

4) Закон Ампера — ток создает циркуляцию магнитного поля:

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{\Gamma} \vec{j} d\vec{S},$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{j}.$$

Максвелл заметил, что из закона Ампера следует, что заряд не может вытекать из области, что бывает не всегда, т. е.

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

(это следует из того, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$ ).

Закон Ампера был проверен в стационарном случае. Отличие должно проявляться в нестационарном случае. Максвелл добавил в закон Ампера еще один член, и получилось

$$\operatorname{rot} \vec{H} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{j}.$$

Из уравнений Максвелла следует, что электрические и магнитные поля могут распространяться. Существуют электромагнитные волны. Оказалось, что скорость распространения этих волн совпадает со скоростью света. Именно из этого Максвелл сделал вывод о том, что свет имеет электромагнитную природу.

## Лоренц-инвариантность уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразования Галилея. Лоренц (до открытия Эйнштейном теории относительности) обнаружил формальную инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований

$$x \rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t \rightarrow \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Если одновременно преобразовывать  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \frac{E_y + H_z v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & E'_z &= \frac{E_z - H_y v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \frac{H_y - E_z v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & H'_z &= \frac{H_z + E_y v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

то форма уравнений Максвелла сохранится.

Эта симметрия делается более очевидной, если переписать уравнения Максвелла в четырехмерных обозначениях:

$$\begin{aligned} \partial_0 &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt}, & \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \partial_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & \partial_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ F_{0i} &= E_i; & F_{ik} &= -\varepsilon_{ikl} H_l; & j = (c\rho, \vec{j}). \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла делятся на две пары. Первая пара — это второе и третье уравнения, которые не зависят от зарядов и токов, вторая — первое и четвертое уравнения, которые зависят.

$$\begin{aligned} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -\frac{4\pi}{c} j^\nu. \end{aligned} \tag{1.3}$$

В этой записи инвариантность очевидна, если считать  $F_{\mu\nu}$  тензором, а  $j^\mu$  — вектором по отношению к преобразованиям Лоренца.

## Векторный потенциал, калибровочная инвариантность

Попробуем решить первую пару уравнений Максвелла, т. е. первое уравнение из (1.3).

Если  $A_\mu$  — векторное поле, то

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

удовлетворяет первой паре уравнений Максвелла. Верно и обратное: если  $F_{\mu\nu}$  удовлетворяет первому уравнению из системы (1.3), то существует векторное поле  $A_\mu$  такое, что  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Представление  $F_{\mu\nu}$  в форме  $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  не единственno. Действительно, если  $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ , то  $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ .

Трехмерная запись электромагнитного поля через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \text{где } \varphi = A_0.$$

Попробуем найти лагранжиан для заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле. Сначала предположим, что электромагнитное поле дано, т. е. оно не зависит от заряженных частиц.

Нам надо найти такое  $S[x^\mu(\tau), A_\mu(x)]$ , чтобы уравнение  $\delta S = 0$  было эквивалентно

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Очевидно, действие должно быть лоренц-инвариантно и калиброчочно-инвариантно. Рассмотрим действие вида

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu,$$

где интегралы берутся вдоль траектории. Первое слагаемое — действие для свободной частицы. Лоренц-симметрия очевидна. Видно также, что действия для  $A_\mu$  и  $A_\mu + \partial_\mu f$  отличаются на константу  $f(b) - f(a)$ , а значит, экстремали этих действий совпадают.

Легко проверить, что уравнения движения можно вывести, исходя из вариационного принципа  $\delta S = 0$ .

Замечательным обстоятельством является то, что такая вспомогательная, казалось бы, вещь, как  $A_\mu(x)$ , позволяет написать простое выражение для действия. Выражения для действия, использующие  $F_{\mu\nu}$ , очень сложны и некрасивы. Это *сигнал*, указывающий на фундаментальное значение векторного потенциала, которое окончательно выявляется в квантовой механике.

## Электромагнитные волны. Волновое уравнение

Уравнения Максвелла в пустоте имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{E} = 0. \end{cases}$$

Оказывается, эти уравнения могут иметь отличные от нуля решения, меняющиеся со временем. Это говорит о том, что электромагнитные волны могут распространяться, даже когда нет зарядов и токов.

Выразим  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  через векторный потенциал  $A_\mu = (A_0, \vec{A})$ . Выбор векторного потенциала неоднозначен, поэтому мы можем наложить на него дополнительное условие, с тем чтобы избавиться от произвола и упростить решения. Такие условия называются *выбором калибровки*.

Выберем калибровку  $A_0 = 0$ . В этой калибровке

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Выражения для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  через векторный потенциал, разумеется, автоматически удовлетворяют первой паре уравнений Максвелла. Подставим эти выражения во вторую пару:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

Несмотря на выбор калибровки  $A_0 = 0$ , мы можем делать дополнительные калибровочные преобразования  $\vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} f$ , если  $f$  не изменяется во времени. Из уравнения  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  следует, что  $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = 0$ . Поэтому мы можем выбрать  $f$  так, чтобы  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ . В этом случае  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\Delta \vec{A}$  и уравнения Максвелла принимают вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = 0. \tag{1.4}$$

Это и есть волновое уравнение.

Другой вывод. Уравнения Максвелла в пустоте имеют вид  $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$ , где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

Поэтому

$$\partial_\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = 0.$$

Выберем калибровочное условие  $\partial_\mu A_\mu = 0$ . Такой выбор называют *калибровкой Лоренца*, это условие слабее, чем предыдущее. Получаем  $\partial_\mu \partial_\mu A_\nu = 0$ , т. е.  $\Delta A_\nu = 0$ .

Вернемся обратно в калибровку  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  и  $A_0 = 0$ . Рассмотрим частный случай, когда  $A_\mu$  зависит лишь от  $x$  и  $t$ . Для каждой из компонент уравнение (1.4) имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

т. е.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0.$$

Отсюда видно, что решения (1.4) имеют вид

$$f(t, x) = f_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (1.5)$$

Первое слагаемое в (1.5) — это плоская волна, бегущая со скоростью  $c$  в положительном направлении оси  $x$ : то, что находится в данный момент в данной точке, через время  $\Delta t$  сдвинется на расстояние  $c\Delta t$  по оси  $x$ . Второе слагаемое — плоская волна, бегущая в другую сторону.

Так как  $A$  не зависит от  $y$  и  $z$ , т. е.  $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0$ , то из  $\operatorname{div} A = 0$  следует, что  $\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$ . Тогда из уравнения следует, что  $\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0$ ; т. е.  $A_x = \text{const}$  — постоянное электрическое поле вдоль оси  $x$ . Будем считать, что этого поля нет, и что  $A_x = 0$ . Тогда  $\vec{A}$  перпендикулярно оси  $x$  и

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} = [\nabla, \vec{A}] = -\frac{1}{c} \left[ \vec{n}, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = -\frac{1}{c} [\vec{n}, \vec{E}],$$

так как  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r} \cdot \vec{n} - tc)$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор вдоль оси  $x$ . Таким образом, в плоской волне  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

Поток энергии электромагнитной волны равен

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} \cdot E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} \cdot H^2 \vec{n};$$

Плотность энергии электромагнитного поля равна

$$W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}.$$

Здесь  $(W, S_1, S_2, S_3)$  — четыре компоненты тензора энергии импульса  $T_{\mu\nu}$  для электромагнитного поля, а именно,  $W = T_{00}, S_i = T_{i0}$ .

Непосредственно из уравнений Максвелла можно вывести, что  $\frac{\partial W}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{S}$  и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \int_D W = \int_{\partial D} \vec{S} d\vec{s}.$$

Частный случай плоской волны — монохроматическая волна:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{A}, \quad \text{и, следовательно,} \quad \Delta \vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид  $\vec{A} = \operatorname{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}$ , где  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  — длина волны,  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$  — волновой вектор. Если вектор  $\vec{n}$  не сонаправлен оси  $x$ , то решение имеет вид  $\vec{A} = \operatorname{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ .

## Запаздывающие потенциалы (потенциалы Лиенара–Вихерта)

Мы разобрались с электромагнитными волнами в пустоте. Теперь посмотрим, как волны излучаются потенциалами.

Сначала рассмотрим случай, когда заряды и токи не зависят от времени.

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \text{следовательно,} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Функцию  $\varphi$  называют скалярным потенциалом. Из этих уравнений следует уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{1.6}$$

Сначала найдем решение для точечного заряда, расположенного в начале координат; общее решение мы можем найти по линейности.

Из соображений симметрии ясно, что  $\vec{E}$  должно быть направлено по радиусу, и что  $|\vec{E}|$  зависит лишь от  $R$ . Тогда из равенства  $\int \vec{E} d\vec{s} = 4\pi Q$  следует, что  $E \cdot 4\pi R^2 = 4\pi Q$ .

Уравнение  $|\vec{E}| = Q/R^2$  или  $\vec{E} = Q\vec{R}/R^3$  — это закон Кулона и  $\varphi = Q/R$ . Из (1.6) и последней формулы следует, что  $\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\vec{R})$ . Если зарядов много, то  $\varphi = \sum \frac{e_\alpha}{R_\alpha}$  или  $\varphi = \sum \frac{e_\alpha}{|\vec{R} - \vec{r}_\alpha|}$ , где  $R_\alpha$  — расстояние от заряда  $e_\alpha$  до наблюдателя,  $\vec{R}$  — координаты наблюдателя,  $\vec{r}_\alpha$  — координаты заряда  $e_\alpha$ . В случае непрерывного распределения

$$\varphi(\vec{R}) = \int \frac{\rho(\vec{r}) d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{R}|}.$$

Для статических токов формулы аналогичные.

Теперь пусть заряды меняются со временем. Тогда в калибровке  $\partial_\mu A_\mu = 0$  уравнения выглядят так:

$$\Delta A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu$$

или

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \rho.\end{aligned}$$

Как и в статическом случае, разобьем пространство на маленькие объемчики. Плотность заряда  $\rho = e(t)\delta(\vec{R})$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} e(t)\delta(\vec{R})$$

и везде, кроме начала координат,

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Из симметричности следует, что  $\varphi$  зависит лишь от  $R$ . Переписав  $\Delta$  в сферических координатах, получаем

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Подставим  $\varphi = \frac{\chi(R, t)}{R}$ . Тогда  $\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$ , т. е.

$$\chi = f_1(t - R/c) + f_2(t + R/c).$$

Рассмотрим частное решение вида  $\varphi = \frac{\chi(t - R/c)}{R}$  и найдем  $\varphi$  в начале координат. Устремляя  $R \rightarrow 0$  и отбрасывая член  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ , не содержащий больших производных по  $R$ , получаем при  $R \rightarrow 0$ , что  $\Delta \varphi = -\frac{4\pi}{c} e(t) \delta(\vec{R})$ . Это уравнение мы уже решали:  $\varphi = \frac{e(t - R/c)}{R}$ . Физический смысл этого — потенциал создается зарядом в момент времени на  $\frac{R}{c}$  раньше текущего. Окончательный ответ:

$$\varphi(\vec{R}) = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - R/c)}{R} d^3 r = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}|} d^3 r.$$

Аналогично

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}|} d^3 r.$$

Эти формулы называются формулами *запаздывающих потенциалов* или *потенциалов Лиенара–Вихерта*.

Теперь разберемся, как излучаются волны. Пусть имеется система зарядов и токов в некотором шаре диаметра  $l$ , и мы смотрим на электромагнитное поле на расстоянии  $R_0 \gg l$ . В этой области

$$|\vec{R} - \vec{r}| \approx R - \vec{n}\vec{r},$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный к нам. На больших расстояниях мы можем пренебречь членом  $\vec{n}\vec{r}$  в знаменателе:

$$\vec{A} = \frac{1}{cR} \int \vec{j} \left( \vec{r}, t - \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} \right) d^3 r.$$

Более того, членом  $\frac{\vec{r}\vec{n}}{c}$  также можно пренебречь, если  $l \ll cT$ , где  $T$  — характерное время изменения токов.

$$j\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c} - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\right) \approx j\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right),$$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR} \int \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right) d^3 r.$$

Отсюда видно, что если  $R$  существенно больше  $l$  и длины волны  $\lambda = cT$ , т. е. если волны можно считать плоскими, то не только потенциал убывает как  $\frac{1}{R}$ , но и  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{[\vec{A}, \vec{n}]}{c}$  и  $\vec{E} = [\vec{n}, \vec{H}]$  убывают, как  $\frac{1}{R}$ . Поэтому поток энергии  $[\vec{E}, \vec{H}]$  пропорционален  $\frac{1}{R^2}$  и полный поток энергии через каждую сферу, окружающую систему зарядов, остается постоянным. Другими словами, энергия действительно уходит. В случае статических зарядов  $\vec{H} = 0$  и потока энергии нет.

## Реальность векторного потенциала в квантовой механике

В квантовой механике вероятность того, что частица перейдет из одной точки в другую, равна  $|A|^2$ , где  $A$  — амплитуда вероятности:

$$A = \sum e^{-iS/\hbar},$$

а сумма берется по всем возможным путям,  $S$  — действие, в которое, как мы видели, входит векторный потенциал.

Пусть у нас есть источник электронов, пролетающих через экран с двумя щелями. Наблюдается интерференционная картина. Минимум или максимум находятся в данной точке интерференционной картины — зависит от разности фаз. Рассмотрим соленоид бесконечной длины. Если по обмотке идет ток, то внутри соленоида возникает магнитное поле, но снаружи этого не происходит. Несмотря на это, если мы поместим соленоид между двумя пучками, туда, где не могут пролетать электроны, и включим ток, интерференционная картина сместится. Это происходит, потому что в силу  $H = \text{rot } A$  там, где пролетают электроны, изменяется векторный потенциал  $A$  (хотя и отсутствует  $H$ ), а значит, изменяется и значение  $S$ . Этот якобы

вспомогательный объект — векторный потенциал — является вполне физическим, и частицы с ним взаимодействуют.

## Геометрия и калибровочные поля

Описание электромагнитных явлений приводит естественным образом к тензору напряженности  $F_{\mu\nu}$  и векторному потенциалу  $A_\mu$ . Оказывается, эти величины имеют замечательный геометрический смысл. Выявление этого смысла ведет к интересным и важным обобщениям.

Векторный потенциал  $A_\mu(x)$  — это векторное поле. Физику определяет  $A_\mu$  по модулю калибровочных преобразований  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ . Пусть  $\psi(x)$  — комплексное поле. Рассмотрим действие группы  $U(1)^\infty = \prod U_x(1)$  (произведения групп  $U(1)$  в каждой точке) на полях  $\psi(x)$ , определенное формулой

$$\psi(x) \mapsto e^{if(x)}\psi(x).$$

Таким образом, в каждой точке мы имеем одномерное комплексное (или двумерное вещественное) представление группы  $U(1)$  (или  $O(2)$ ):  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ . Разность  $\psi(y) - \psi(x)$  не является «правильным» объектом, ибо не преобразуется по представлению нашей (калибровочной) группы. Аналогично производная  $\partial_\mu \psi$  не является правильным объектом. Чтобы обойти это, мы введем векторное поле  $A_\mu(x)$ , преобразующееся под действием нашего представления по формуле  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ , и с его помощью определим параллельный перенос  $\psi(x)$  в точку  $y$  по кривой  $C$ , соединяющей  $x$  и  $y$ :

$$\psi(x \rightarrow y, C) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i \int_C A_\mu dx^\mu} \psi(x).$$

Видно, что  $\psi(x \rightarrow y, C)$  преобразуется так же, как и  $\psi(y)$ . Поэтому и  $\psi(y) - \psi(x \rightarrow y, C)$  — правильный объект.

Если  $y^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$ , то

$$\psi(x + \Delta x) - \psi(x \rightarrow x + \Delta x) = (\nabla_\mu \psi) \Delta x^\mu,$$

где

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu.$$

$\nabla_\mu$  называют *ковариантной производной*. Очевидно, что  $\nabla_\mu$  — вектор, как и  $\partial_\mu$ , и при калибровочном преобразовании

$$\nabla_\mu \psi \rightarrow e^{if(x)} \nabla_\mu \psi.$$

Математические названия. Функция  $\psi(x)$  называется *сечением расслоения*,  $U(1)$  — это *структурная группа* этого расслоения,  $A_\mu$  — *связность*.

Мы определили параллельный перенос с помощью кривой  $C$ , соединяющей точки  $x$  и  $y$ . Зависит ли перенос от контура  $C$ ?

Это определяется тем, равен ли 0 интеграл по замкнутому контуру  $\oint A_\mu dx^\mu$ . Этот интеграл сводится к сумме интегралов по маленьким контурам

$$\oint_{\Delta S} A_\mu dx^\mu = F_{\mu\nu} \Delta S^{\mu\nu},$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ .

Параллельный перенос не зависит от пути, если  $F_{\mu\nu} = 0$ . Такое расслоение называется *плоским*, а величина  $F_{\mu\nu}$  — *кривизной связности*  $A_\mu$ .

Получаем, что тензор напряженности электромагнитного поля является кривизной.

Все, о чем говорилось только что, допускает обобщение на случай неабелевой калибровочной группы. Вместо скалярного поля  $\psi(x)$  рассмотрим теперь векторное поле  $\psi^i(x)$ . Пусть  $U$  — некоторая группа  $G$  матриц  $N \times N$ ,  $A_\mu$  — матричнозначные функции  $A_\mu^{ik}(x)$  со значениями в алгебре Ли группы  $U$ , причем при замене координаты  $x$  на  $y$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu, \quad A'_\mu(y) = A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}.$$

$A_\mu$  — это калибровочное поле или связность в линейном расслоении со структурной группой  $G$ .

Определим перенос из точки  $x$  в точку  $y$  по контуру  $C$  следующей формулой

$$\psi(x \rightarrow y, C) = \prod (1 + A_\mu dx^\mu).$$

Мы разбиваем кривую  $C$  на много маленьких кусочков и берем упорядоченное произведение значений на каждом кусочке:

$$\psi(x \rightarrow x + \Delta x) = (1 + A_\mu \Delta x^\mu) \psi(x).$$

При замене  $\psi(x)$  на  $g(x)\psi(x)$  связность преобразуется по следующей формуле:

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g) \cdot g^{-1}.$$

По определению ковариантная производная равна

$$\nabla\psi = (\partial_\mu + A_\mu)\psi.$$

**Теорема.** Если  $\psi(x) \rightarrow g(x)\psi(x)$ ,  $A_\mu \rightarrow gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1}$  то  $\nabla_\mu\psi \rightarrow g\nabla_\mu\psi$ .

**Теорема.** Определим кривизну  $F_{\mu\nu}\psi = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi$ . Тогда

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

В абелевом случае последний член, естественно, исчезает.

## Историческое отступление

Это обобщение было придумано Янгом и Миллсом в 1954 году, по-видимому, из чисто эстетических соображений. В том же году Ландау и его сотрудники провозгласили «теорему» о нуле заряда (московский нуль), в которую все поверили и из которой следовало, что квантовая теория поля не может описывать взаимодействие элементарных частиц. Это убеждение просуществовало 20 лет (на протяжении которых почти никто квантовой теорией поля не занимался), которые понадобились для построения квантовой теории неабелевых калибровочных полей, после чего «теорема» о нуле заряда была проверена для этого случая и не подтвердилась. После этого квантовая теория поля была реабилитирована.

## Уравнения Максвелла. Обобщение на неабелев случай

Ранее мы ввели четырехмерный тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор тока  $j^\mu = (c\rho, j_1, j_2, j_3)$ . Теперь уравнения Максвелла могут быть записаны так:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0,$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j_\nu.$$

Напомним, что греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3,

$$\partial_0 = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Очевидно, эти уравнения обладают лоренц-инвариантностью, так как если тензор равен 0 в одной системе координат, то он равен 0 и в другой системе координат.

Первую пару уравнений Максвелла можно решить:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Векторный потенциал  $A_\mu$  при этом определяется не однозначно, а с точностью до калибровочных преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f.$$

Эта ситуация является частным случаем расслоения со связностью.

Рассмотрим функцию  $\psi$  на пространстве Минковского со значениями в некотором  $N$ -мерном пространстве, или, другими словами,  $N$  функций  $\psi^1(x), \dots, \psi^N(x)$ . Возьмем матричную группу  $G$  и функцию  $g(x)$  со значениями в  $G$ . Калибровочное преобразование

$$g(x): \psi(x) \rightarrow g(x)\psi(x) \quad (\psi^i(x) \rightarrow g_k^i(x)\psi^k(x))$$

( $\psi$  на самом деле не функция, а сечение расслоения).

Функция  $\partial_\mu \psi$  этим свойством не обладает, т. е. при замене  $\psi(x)$  на  $g(x)\psi(x)$   $\partial_\mu \psi(x)$  переходит не в  $g(x)\partial_\mu \psi(x)$ . Чтобы исправить это, вместо производной  $\partial_\mu$  введем ковариантную производную  $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$  (т. е.  $(\nabla_\mu \psi)^i = (\partial_\mu \psi^i) + (A_\mu)_k^i \psi^k$ ). Мы хотим, чтобы при замене  $\psi(x)$  на  $g(x)\psi(x)$   $\nabla_\mu \psi(x)$  переходило в  $g(x)\nabla_\mu \psi(x)$ . Для этого необходимо, чтобы  $A_\mu$  переходило в  $gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1}$ . Докажем это:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu + gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1})g\psi &= \partial_\mu(g\psi) + gA_\mu\psi - \partial_\mu g \cdot \psi = \\ &= \partial_\mu g \cdot \psi + g \cdot \partial_\mu \psi + gA_\mu\psi - \partial_\mu g \cdot \psi = g(\partial_\mu + A_\mu)\psi = g\nabla_\mu \psi. \end{aligned}$$

В случае, если  $g$  — унитарная матрица  $1 \times 1$ , т. е. комплексное число, равное 1 по модулю, ( $g(x) = e^{if(x)}$ ), получается  $A_\mu \rightarrow A_\mu - i\partial_\mu f$ .

С помощью связности определяется параллельный перенос

$$\psi(x \rightarrow x + dx) = (1 + A_\mu dx^\mu)\psi(x).$$

Это выражение преобразуется так же, как и  $\psi(x + dx)$ . Поэтому их можно вычитать, преобразуя ковариантную производную. С помощью этой формулы можно переносить по кривым, разбивая их на маленькие кусочки. (Параллельный перенос  $\psi(x)$  по кривой является решением дифференциального уравнения  $\nabla_v \psi = 0$ , где  $v$  — касательный вектор к кривой.)

В общем случае результат параллельного переноса зависит от пути. Перенос не зависит от пути, если  $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = 0$ . В этом случае связность называют *плоской*. Вычислим  $F_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\nu \psi &= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\psi = \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \psi + A_\mu \partial_\nu \psi + \partial_\mu (A_\nu \psi) + A_\mu A_\nu \psi, \\ \nabla_\nu \nabla_\mu \psi &= \partial_\nu \partial_\mu \psi + A_\nu \partial_\mu \psi + \partial_\nu (A_\mu \psi) + A_\nu A_\mu \psi, \\ \partial_\mu (A_\nu \psi) &= (\partial_\mu A_\nu)\psi + A_\nu (\partial_\mu \psi), \\ \partial_\nu (A_\mu \psi) &= (\partial_\nu A_\mu)\psi + A_\mu (\partial_\nu \psi), \\ (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\psi &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])\psi.\end{aligned}$$

Связность называют *тривиальной*, если ее можно калибровочным преобразованием привести к виду  $A_\mu \equiv 0$ .

Связность является тривиальной, если  $A_\mu = -\partial_\mu g \cdot g^{-1}$ .

## Действие электромагнитного поля

Есть уравнения двух сортов: первые описывают, как ведут себя частицы, вторые — как развиваются сами электромагнитные поля, например, уравнение Лоренца  $\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{H}]$  и уравнения Максвелла.

До сих пор выражением для действия частицы в электромагнитном поле было  $S = S_x + S_{x,A}$ , где  $S_x = mc \int ds$ ,  $S_{x,A} = -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu$ , здесь  $A_\mu$  — заданная функция координат.

Уравнение  $\delta S = 0$  эквивалентно уравнению Лоренца.

Теперь мы хотим найти вид  $S_A$  так, чтобы вариация  $S = S_x + S_{x,A} + S_A$  по  $A_\mu$  приводила к уравнениям Максвелла. Ответ есть

$$S_A(A) = -\frac{1}{16c\pi} \int F_{\mu\nu}^2 d^4x.$$

Если бы мы рассматривали  $S$  как функционал от  $F_{\mu\nu}$ ,  $\delta S = 0$  означало бы, что  $F_{\mu\nu} = 0$ . Но мы должны помнить, что на самом деле  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  и независимые переменные —  $A_\mu$ .

$$\begin{aligned}\delta S_A &= -\frac{1}{8c\pi} \int F_{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8c\pi} \int F_{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) = \\ &= -\frac{1}{4c\pi} \int F_{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = \frac{1}{4c\pi} \int \partial_\mu F_{\mu\nu} \delta A_\nu = 0.\end{aligned}$$

Итак, уравнение  $\delta S_A = 0$  эквивалентно уравнению  $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$ , т. е. левой части второй пары уравнений Максвелла. Правая часть второй пары уравнений Максвелла получается, если проварьировать  $S_{x,A}$  по  $A$  ( $\delta S = \delta S_x + \delta S_{x,A} + \delta S_A$ ,  $S_{x,A} = -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^4$  переходит в  $-\frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu dx^4$ ). Первая пара уравнений Максвелла автоматически выполняется, так как мы считаем, что  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

## Расширение группы симметрий

Уравнения Максвелла в вакууме имеют более широкую группу симметрий, чем группа Пуанкаре. Это группа *конформных преобразований*, т. е. группа преобразований, сохраняющих углы, или группа преобразований  $x^\mu \rightarrow y^\mu(x)$ , для которых  $(dy^\mu)^2 = \rho(x)(dx^\mu)^2$ . Группа конформных преобразований содержит группу Пуанкаре, растяжения  $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$  и инверсию  $x^\mu \rightarrow y^\mu = \frac{x^\mu}{\sum(x^\mu)^2}$ , и эти преобразования порождают всю группу конформных преобразований. Группа конформных преобразований изоморфна  $O(4, 2)$ .

## Поля Янга–Миллса

Формула действия для электромагнитного поля прямо обобщается на неабелев случай.

Рассмотрим форму кривизны  $F_{\mu\nu}$ . Это 2-форма с коэффициентами в алгебре Ли группы  $G$ , т. е. при каждом значении  $\mu$  и  $\nu$  величина  $F_{\mu\nu}$  — это матрица  $N \times N$  из алгебры Ли группы  $G$ ,  $F_{\mu\nu}^2$  — также матрица  $N \times N$ . У этой матрицы есть след  $\text{Tr } F_{\mu\nu}^2$ , который называется *формой Киллинга*.

Положим  $S = -\frac{1}{4\pi} \int \text{Tr } F_{\mu\nu}^2 d^4x$ . Связности  $A_\mu(x)$ , минимизирующие данное действие, называют полями Янга–Миллса.

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi} \int \text{Tr } F_{\mu\nu} \nabla_\mu \delta A_\nu d^4x,$$

где  $\nabla_\mu a = \partial_\mu a + [A_\mu, a]$ .

$\delta S = 0$  означает, что

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Кроме того, всегда выполняются уравнения

$$\nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (1.8)$$

которые называются *тождеством Бьянки*.

Уравнения (1.7) и (1.8) называются *уравнениями Янга–Миллса*, это нелинейные уравнения.

## Топология пространства калибровочных полей с конечным действием

Будем считать пространство евклидовым и четырехмерным. Рассмотрим решения уравнений Янга–Миллса  $A_\mu$ , для которых  $S[A] < \infty$ .

Для этого достаточно, чтобы  $F_{\mu\nu} = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  или  $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Из условия  $F_{\mu\nu} = 0$  следует, что  $A_\mu = (\partial_\mu g) \cdot g^{-1}$ .

Так как  $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ , то при больших  $|x| \gg 1$  получаем отображение  $g: S^3 \rightarrow G$ . Рассмотрим группу  $G = \text{SU}(2)$ .  $\text{SU}(2) \simeq S^3$ . Любое непрерывное отображение  $g: S^3 \rightarrow S^3$  с точностью до гомотопической эквивалентности характеризуется целым числом  $k \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^3)$ , совпадающим со степенью этого отображения.

В случае  $G = \text{SU}(2)$  любой элемент  $g \in G$  — это  $2 \times 2$  матрица, удовлетворяющая условию  $g^+ g = 1$ , где  $1$  — единичная матрица.

Любую такую матрицу  $g$  можно представить как сумму  $g = n^0 \mathbb{1} + \sum_{k=1}^3 n^k \sigma_k$ , где  $\sigma_k$  — матрицы Паули, с условием  $\sum_\mu (n^\mu)^2 = 1$  (напомним, что  $n^\mu = n^\mu(x)$ , функции точек нашего пространства  $\mathbb{R}^4$ ).

Степень отображения  $g$  можно вычислить, проинтегрировав якобиан отображения.

**Пример.** Рассмотрим отображение  $v: S_1^1 \rightarrow S_2^1$ . Пусть на  $S_1^1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  угловая координата  $\alpha$ , а на  $S_2^1 = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 = R^2\}$  угловая координата  $\varphi$ . Тогда  $2\pi = \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_{S_2^1} \frac{-y_2 dy_1 + y_1 dy_2}{y_1^2 + y_2^2}$ , но

$$\begin{aligned} \deg v &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi R^2} \int_{S_1^1} -y_2(\partial_1 y_1 dx_1 + \partial_2 y_1 dx_2) + y_1(\partial_1 y_2 dx_1 + \partial_2 y_2 dx_2) = \\ &= \frac{1}{2\pi R^2} \int_{S_1^1} y_a \partial_\mu y_b dx^\mu \varepsilon^{ab} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1^1} \varepsilon^{ab} y_a \partial_\mu y_b dx^\mu \end{aligned}$$

(в случае  $R = 1$ ).

Пусть  $g: S^3 \rightarrow \mathrm{SU}(2) \simeq S^3$ . Обе сферы вложены в  $\mathbb{R}^4$ . Будем, как и в примере, считать, что координаты в прообразе  $(x^0, \dots, x^3)$ , а в образе —  $(n^0, \dots, n^3)$ ,  $\sum(n^\mu)^2 = 1$ .

Определим следующие дифференциальные формы:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} d \left( \sum (n^\mu)^2 \right) = n^\mu dn^\mu, \\ \Omega &= \sum_{\mu=0}^3 (-1)^{\mu-1} n^\mu dn^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dn^\mu} \wedge \dots \wedge dn^3 \end{aligned}$$

(во второй формуле в каждом слагаемом один дифференциал  $dn^k$  пропущен).

Тогда

$$\omega \wedge \Omega = dn^0 \wedge dn^1 \wedge dn^2 \wedge dn^3. \quad (1.9)$$

Физики записывают форму  $\Omega$  так:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{6} \varepsilon_{abcd} n^a dn^b \wedge dn^c \wedge dn^d = d\tau, \\ g^*(\Omega) &= \frac{1}{6} \varepsilon_{abcd} n^a (\partial_\mu n^b dx^\mu) \wedge (\partial_\nu n^c dx^\nu) \wedge (\partial_\lambda n^d dx^\lambda) = \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d \varepsilon^{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda, \\ &\quad \varepsilon^{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda = ds^{\mu\nu\lambda}. \end{aligned}$$

Степень отображения  $g$ , как и в примере, задается интегралом

$$q = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{S^3} d\tau = \frac{1}{12\pi^2} \int\limits_{S^3} \varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d ds^{\mu\nu\lambda}. \quad (1.10)$$

**Теорема.** Выполнено следующее соотношение

$$\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu g \cdot g^{-1})(\partial_\nu g \cdot g^{-1})(\partial_\lambda g \cdot g^{-1}). \quad (1.11)$$

Поскольку правая и левая части равенства (1.11) SU(2)-инвариантны, то достаточно доказать равенство в единице группы SU(2).

При  $g = e$   $n^0 = 1$ ,  $n^1 = n^2 = n^3 = 0$ . Кроме того,  $\sum(n^\mu)^2 = 1$ , следовательно,  $\partial_\mu n^0 = 0$ . Доказываемое равенство будет выглядеть так:

$$\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \varepsilon_{bcd} \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu g)(\partial_\nu g)(\partial_\lambda g),$$

где  $\partial_\mu g = \partial_\mu n^1 \sigma_1 + \partial_\mu n^2 \sigma_2 + \partial_\mu n^3 \sigma_3$ , которое проверяется прямым вычислением.

**Замечание.** Мы рассматриваем след, поэтому в правой части нас интересует только коэффициент при  $\mathbb{1}$ .

Очевидно, что поля  $A_\mu$ , асимптотики которых равны различным  $q$ , не могут быть продеформированы одно в другое.

Существует замечательное представление  $q$  через  $F_{\mu\nu}$ .

**Теорема.** Если  $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , то  $q = \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* d^4x$ , где  $F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}$ .

Сначала покажем, что  $\text{Tr} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* d^4x = \text{const}$  при варьировании  $A_\nu$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \delta \left( \text{Tr} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* d^4x \right) &= \delta \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \text{Tr} \int F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} d^4x \right) = \\ &= \text{Tr} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \int F_{\mu\nu} \delta F_{\lambda\sigma} d^4x = \\ &= \text{Tr} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \int F_{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta A_\sigma - \nabla_\sigma \delta A_\lambda) d^4x = \\ &= 2 \text{Tr} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \int F_{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta A_\sigma d^4x = \\ &= 2 \text{Tr} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \int_{S^3(R)} F_{\mu\nu} \delta A_\sigma d\tau^\lambda - 2 \text{Tr} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \int_{\mathbb{R}^4} (\nabla_\lambda F_{\mu\nu}) \delta A_\sigma d^4x = 0. \end{aligned}$$

В последнем выражении граничный член представляет из себя интеграл по  $S^3(R)$  от функции, равной  $o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \cdot o\left(\frac{1}{|x|}\right) = o\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$  при  $|x| = R \rightarrow \infty$  и поэтому стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ . Равенство нулю последнего члена эквивалентно тождеству Бьянки

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Следовательно,  $\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* d^4x$  не меняется при непрерывных изменениях  $A_\mu$ .

Кроме того, верно равенство

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu}^* = 0. \quad (1.12)$$

Действительно,

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ \partial_\mu F_{\alpha\beta} + [A_\mu, F_{\alpha\beta}] \},$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha.$$

Из-за кососимметричности  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F_{\mu\nu}^* &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + A_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \\ &\quad - (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta)A_\mu\} = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \partial_\mu A_\alpha \cdot A_\beta + A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta + A_\mu A_\alpha A_\beta - \\ &\quad - \partial_\alpha A_\beta \cdot A_\mu - A_\alpha A_\beta A_\mu\} = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + (\partial_\mu A_\alpha \cdot A_\beta - \partial_\alpha A_\beta \cdot A_\mu) + \\ &\quad + (A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta) + (A_\mu A_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta A_\mu)\} = 0 \end{aligned}$$

из-за кососимметричности  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^*) &= \text{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F_{\mu\nu}^* + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)F_{\mu\nu}^*\} = \\ &= \text{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F_{\mu\nu}^* + A_\mu A_\nu F_{\mu\nu}^* - A_\mu F_{\mu\nu}^* A_\nu\} = \\ &= \text{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F_{\mu\nu}^* + A_\mu[A_\nu, F_{\mu\nu}^*]\}. \end{aligned}$$

Здесь, и в дальнейшем, мы используем свойство циклической перестановки под знаком следа. Используя (1.12), получаем

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^*) &= \text{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F_{\mu\nu}^* - A_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu}^*\} = \\ &= \text{Tr}\{\partial_\mu A_\nu \cdot F_{\mu\nu}^* - \partial_\nu(A_\mu F_{\mu\nu}^*)\} = \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} - \partial_\nu(A_\mu F_{\alpha\beta})\} = \\ &= \text{Tr}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \partial_\nu(A_\mu\partial_\alpha A_\beta + A_\mu A_\alpha A_\beta)\} = \\ &= \text{Tr}\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + (\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta - \partial_\nu A_\mu\partial_\alpha A_\beta - \\ &\quad - A_\mu\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta - \partial_\nu(A_\mu A_\alpha A_\beta)]\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что

$$\text{Tr}\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\} = \frac{1}{3}\text{Tr}\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\},$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[-(\partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta)] = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta),$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = 0.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^*) &= \text{Tr} \left\{ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[ 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + \frac{4}{3}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta) \right] \right\} = \\ &= \text{Tr} \left\{ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[ 2(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + 2A_\nu\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \frac{4}{3}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta) \right] \right\} = \\ &= \text{Tr} \left\{ 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[ \partial_\mu \left( A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta \right) \right] \right\} = \\ &= \partial_\mu \left\{ \text{Tr} 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[ A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta \right] \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$J_\mu = \text{Tr} \left\{ 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left[ A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta \right] \right\}.$$

Пусть  $B(R)$  — шар радиуса  $R$  в  $\mathbb{R}^4$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{B(r)} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^*) d^4x &= \int_{B(r)} \partial_\mu J_\mu d^4x = \int_{S^3(R)} J_\mu ds^\mu = \\ &= 2 \int_{S^3(R)} \text{Tr} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left( A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta \right) ds^\mu. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь условием, что  $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , т. е.  $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -[A_\mu, A_\nu]$  и тем, что  $2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\nu] = -2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu A_\nu$ . Получаем при  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^*) d^4x &= \\ &= 2 \int_{S^3(R)} \text{Tr} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left( -A_\nu A_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta \right) ds^\mu = \\ &= -\frac{2}{3} \int_{S^3(R)} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(A_\nu A_\alpha A_\beta) ds^\mu. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Подставляя (1.14) в (1.10) и (1.11), получаем утверждение теоремы.

**Замечание.** Все вычисления, проведенные в доказательстве последней теоремы, — это рабочий аппарат физика; использованные нами обозначения считаются в физике «обычными обозначениями». Математики называют такой аппарат координатным и предпочитают работать в «бескоординатной» форме. Попробуем привести словарь перевода из одной формы в другую.

$\partial_\mu dx^\mu$	$d$ — дифференциал
$F_{\mu\nu}$	$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ — 2-форма
$\frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho$	$dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$ — форма объема
$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}$	$*F = F_{\mu\nu}^* dx^\mu \wedge dx^\nu$ — сопряженная 2-форма

Например,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr } F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* d^4x = \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr } \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} d^4x = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr } F \wedge F. \end{aligned}$$

Из равенства (1.9) и того, что  $\omega = \frac{1}{2} d(\sum(n^i)^2)$  — форма, ортогональная к сфере  $S^3$ , следует, что  $\Omega$  — форма трехмерного объема на  $S^3$ .

Тождество Бьянки записывается как

$$[\nabla, F] = dF + A \wedge F - F \wedge A = 0.$$

Вместо  $J_\mu$  нужно рассматривать дифференциальную форму  $J = J_\mu ds^\mu$ . Тогда равенство (1.13) есть просто теорема Стокса.

Вернемся к нашему действию  $S[A]$ . Получаем, что

$$\begin{aligned} S[A] &= \frac{1}{4} \text{Tr} \int F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x = \\ &= \frac{1}{8} \text{Tr} \int (F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}^*)^2 d^4x + \frac{1}{4} \text{Tr} \int F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* d^4x \geqslant 8\pi^2 q. \end{aligned}$$

Если минимум существует, то поле, на котором он достигается, должно удовлетворять уравнению *дуальности*:  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^*$ .

Решения этого уравнения называют *инстанционами*.

При  $q = 1$  решения уравнения дуальности имеют вид

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2} n^+ \partial_\mu n,$$

где

$$n = \frac{x_0 \mathbb{1} + i \vec{x} \vec{\sigma}}{|x|}, \quad n^+ = \frac{x_0 \mathbb{1} - i \vec{x} \vec{\sigma}}{|x|}, \quad \vec{x} \vec{\sigma} = x^\mu \sigma_\mu.$$

Эти решения сферически симметричные. Остальные решения получаются из этого действием группы  $x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu; x_\mu \rightarrow \lambda x_\mu$ . Решения составляют 5-параметрическое семейство.

Известно, что для  $q > 0$  существует  $(8|q| - 3)$ -параметрическое семейство решений уравнения автодуальности.

## 4. ОТО (гравитация)

Специальная теория относительности показала, что геометрия играет важную роль в физике. Общая теория относительности идет дальше и делает шаг к тому, чтобы свести физику к геометрии, а именно, гравитация сводится к метрической структуре пространства-времени.

Роль гравитации играет риманова (псевдориманова) структура пространства-времени, на кривизну которой влияет плотность энергии-импульса материи. При этом частицы самой материи движутся по геодезическим.

Специальная теория относительности несовместима с ньютоновской теорией гравитации, основанной на постулате мгновенного дальнодействия.

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 4\pi k\rho, \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\text{grad } \Phi, \end{cases}$$

здесь  $\Phi$  — гравитационный потенциал,  $\rho$  — плотность массы материи,  $\vec{r}(t)$  — координаты частицы.

Эти уравнения можно модифицировать так, чтобы взаимодействие было запаздывающим и передавалось со скоростью света, но при этом

свет не будет искривляться в гравитационном поле, что противоречит опыту: *при полных солнечных затмениях видимые положения звезд отличны от истинных.*

## Основания для расширения постулата относительности

Эйнштейн искал обобщения СТО из философских соображений. Ему не нравилась выделенность инерциальных систем отсчета.

Пусть  $R_1$ ,  $R_2$  — два соосных кольца, одно из которых покоятся, а другое вращается. Причиной того, что  $\pi(R_2) \neq 3,14\dots$ , а  $\pi(R_1) = 3.14\dots$ , выставлялось то, что  $R_1$  покоятся относительно галилеева пространства, т. е. такого, относительно которого верен закон инерции, а  $R_2$  — нет. Но, очевидно, это фиктивная причина. Нет такого опытного факта, как галилеево пространство.

Законы природы должны быть справедливы для произвольно движущихся систем. Это называется *постулатом общей ковариантности*.

Важный физический факт. Пусть  $K$  — галилеева система, масса  $M$  покоятся в ней. Пусть  $K'$  равноускоренно и прямолинейно движется относительно  $K$ . Тогда  $M$  совершает относительно  $K'$  ускоренное движение, причем ускорение не зависит от физического и химического состояния тела. Может ли наблюдатель, покоящийся в  $K'$ , заключить, что он «действительно» находится в ускоряющейся системе отсчета? Нет! Ибо такое поведение масс можно объяснить наличием гравитационного поля, вызывающего ускоренное движение, причем так, что ускорение не зависит от массы тела, его физического и химического состава. Еще Галилей задавал себе вопрос о равенстве инерционной и гравитационной масс. Эксперимент Этвеша показал, что

$$\frac{m_{\text{тяж}} - m_{\text{инер}}}{m_{\text{тяж}}} < 10^{-8},$$

поэтому можно считать, что  $m_{\text{тяж}} = m_{\text{инер}}$ .

Из этого равенства следует, что гравитационное поле локально можно создать или уничтожить изменением координатной системы. Это утверждение называется *принципом эквивалентности*.

Это, в свою очередь, означает, что общая теория относительности — это теория гравитации.

## Гравитация и геометрия

Нет оснований предполагать, что систему координат можно выбрать так, чтобы она была галилеевой или евклидовой. Поэтому следует допустить произвольные системы координат и искать формулировку законов природы, ковариантную относительно любых замен координат.

Итак, каждому событию соответствует  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  в произвольной системе координат. Вместо твердого тела — *моллюск отсчета*, как говорил Эйнштейн (моллюск как нечто аморфное).

## Метрика = гравитация

Естественно считать, что для бесконечно малых четырехмерных областей при подходящем выборе системы координат справедлива специальная теория относительности. Т. е. в ней даны линейки небольших размеров и часы, измеряющие  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ; с помощью них измеряется интервал между бесконечно близкими событиями внутри бесконечно малой области  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$ . И это инерциальная система, в ней нет гравитации, и частица движется равномерно по прямой.

Линейному элементу  $ds$  в некоторой выбранной системе координат соответствует  $(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$ ;  $dx^\mu = a_\nu^\mu dx^\nu$ ;  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Специальная теория относительности предполагает частный случай: координаты можно выбрать так, что  $\tilde{g}_{\mu\nu} = (1, 1, 1, -1)$  всюду. В общем случае произвольного  $g_{\mu\nu}$  такой выбор невозможен.  $g_{\mu\nu}$  следует рассматривать как величины, описывающие гравитационное поле. Если  $g_{\mu\nu}$  в некоторой области постоянны, то движение материальных частиц в этой системе координат равномерно и прямолинейно. Но и в других координатах ускорение и криволинейность не зависит от физической природы тела, т. е. движение можно истолковать как движение в гравитационном поле.

Итак, появление гравитационного поля связано с зависимостью  $g_{\mu\nu}$  от пространственно-временных координат. Но и в общем случае, когда нельзя  $g_{\mu\nu}$  привести к виду  $(1, 1, 1, -1)$  в конечной области, мы предположим, что задание метрического тензора  $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  эквивалентно определению гравитационного поля.

## Уравнение геодезической (движение материальной точки)

Выведем уравнение геодезической из принципа наименьшего действия для функционала длины.

$$\delta \left\{ \int_{P_1}^{P_2} ds \right\} = 0, \quad x^\mu = x^\mu(\lambda); \quad \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = 0.$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left\{ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \frac{\partial x^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial x^\beta}{d\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right\} \delta x^\nu = 0.$$

**Замечание.** Не забудьте, что варьировать нужно не только  $x^\mu$ , но и  $g_{\mu\nu}(x)$  по  $x^\mu$ .

Выбрав  $\lambda = s$  — натуральным параметром, т. е. таким параметром, что  $g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 1$ , получаем

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\mu}^{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad \text{где } \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right)$$

называются *символами Кристоффеля*. Очевидно, что геодезическая на каждом участке, размер которого меньше радиуса кривизны, является прямой. Это и есть ее определение. Поэтому *из принципа эквивалентности следует, что частица движется по геодезической*.

## Ковариантное дифференцирование

В галилеевых координатах  $dA_\mu$  — вектор, как и  $A_\mu$ , а  $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$  — тензор. По отношению к криволинейным координатам и произвольным преобразованиям координат это уже не так. И связано это с тем, что  $dA_\mu = A_\mu(x + dx) - A_\mu(x)$  — разность векторов в различных точках. Каждый из членов разности преобразуются различно, так как в формулах  $A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{A}^\nu$  и  $A_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \tilde{A}_\nu$  матрицы  $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}$  зависят от  $x$ .

Чтобы найти аналоги производных от тензоров, но преобразующихся правильно, надо определить понятие *параллельного переноса* так, чтобы при преобразовании галилеевых координат компоненты вектора при переносе не менялись. Определим

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda.$$

В галилеевой системе координат  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0$ . Теперь  $DA^\mu \stackrel{\text{def}}{=} dA^\mu - \delta A^\mu$  — вектор и

$$DA^\mu = \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \right) dx^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_\lambda A^\mu) dx^\lambda.$$

Так как скаляры не меняются при параллельном переносе, то  $\delta(A^\mu B_\mu) = 0$ . Отсюда следует, что  $\delta B_\mu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu B_\nu dx^\lambda$  и

$$DB_\mu = \left( \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu B_\nu \right) dx^\lambda = (\nabla_\lambda B_\mu) dx^\lambda,$$

$\nabla_\mu$  называется *ковариантной производной*.

Аналогично

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda A_{\mu\nu} &= \partial_\lambda A_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha A_{\alpha\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha A_{\mu\alpha}; \\ \nabla_\lambda A^\mu \dots &= (\partial_\lambda + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu + \dots) A^\alpha \dots; \\ \nabla_\lambda (A_\mu B_\nu) &= (\nabla_\lambda A_\mu) B_\nu + A_\mu \nabla_\lambda B_\nu; \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Закон преобразования символов Кристоффеля выводится из тензорного характера преобразования ковариантной производной:  $\nabla_\mu A_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{A}_\beta$ , отсюда  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\rho}$ . (Сравните с преобразованием  $A_\mu$  — калибровочной связности.)

Отсюда видно, что  $(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)$  — тензор, который называют *тензором кручения*. Если существует система координат, где кручение равно 0, то оно везде будет равно 0 и  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ . Будем рассматривать в дальнейшем такие метрики, где кручение равно 0.

## Локально геодезическая система координат

Пусть в  $x_0^\mu$   $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x_0) = \Gamma_{\mu\nu 0}^\lambda$ . Возьмем новые координаты вблизи  $x_0$ :  $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta 0}^\mu x^\alpha x^\beta + \dots$ . Тогда  $\tilde{\Gamma}(x_0) = 0$ . Так как  $\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}(x_0) = \delta_\nu^\mu$ ,

то эти преобразования не меняют тензоров в точке  $x_0$ , поэтому в ней одновременно можно привести  $g_{\mu\nu}$  к галилеевому виду. Такая система называется *локально геодезической*.

Связь  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  с  $g_{\mu\nu}$  устанавливается из условия согласования параллельного переноса и операции поднятия индексов. Связность согласована с метрикой, если параллельный перенос сохраняет скалярное произведение. Из этого условия получаем, что

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (1.15)$$

Такая метрика называется *римановой* (*псевдо-римановой*).

## Тензор кривизны

При переносе по малому замкнутому контуру  $\Delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu dx^\lambda \approx \approx R_{\mu,\alpha\beta}^\nu A_\nu \Delta\sigma^{\alpha\beta}$ , где

$$R_{\mu\alpha\beta}^\nu = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\nu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\nu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\nu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\beta}^\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda. \quad (1.16)$$

Величина  $R_{\mu\alpha\beta}^\nu$  — это тензор, ибо  $\Delta A_\mu$  — разность в одной точке. Тензор  $R_{\mu\alpha\beta}^\nu$  называется *тензором кривизны*. Если пространство плоское,  $R_{\mu\alpha\beta}^\nu = 0$  и наоборот. Первая часть очевидна. Вторая следует из того, что в бесконечно малой окрестности точки можно взять галилеевскую систему, а из  $R = 0$  следует возможность однозначного ее разнесения во все точки.

## Свойства тензора кривизны

Тензор кривизны  $R_{\mu\alpha\beta}^\nu$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = -R_{\nu\beta\alpha}^\mu; \quad R_{\nu\alpha\beta}^\mu + R_{\alpha\beta\nu}^\mu + R_{\beta\nu\alpha}^\mu = 0. \quad (1.17)$$

Введем величину  $R_{\mu\nu\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\lambda} R_{\nu\alpha\beta}^\lambda$ . Из соотношений (1.15), (1.16), (1.17) после вычислений получаем, что

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\mu\alpha}) + \\ &+ g_{\rho\sigma} (\Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\beta}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\beta}^\sigma), \end{aligned} \quad (1.18)$$

отсюда следует равенство  $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ .

Тензор кривизны  $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$  удовлетворяет тождеству Бьянки

$$\nabla_\gamma R_{\nu\alpha\beta}^\mu + \nabla_\alpha R_{\nu\beta\gamma}^\mu + \nabla_\beta R_{\nu\gamma\alpha}^\mu = 0.$$

Определим величину  $R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$ , которая называется *тензором Риччи*.

Из (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) следует, что

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta, \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}.$$

Кроме того,  $\nabla_\mu R_\alpha^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^\alpha}$ , где величина  $R \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  называется *скалярной кривизной*. Из-за свойств симметрии и тождества Бьянки следует, что тензор кривизны имеет 20 независимых компонент, а  $R_{\mu\nu}$  имеет 10 независимых компонент, которые удовлетворяют дифференциальному тождеству

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \left( R_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} g_{\nu\lambda} R \right) = 0. \quad (1.19)$$

## Уравнения Эйнштейна

Эйнштейн исходил из того, что уравнения на метрику  $g_{\mu\nu}$  должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) быть общековариантными;
- 2) плоское пространство ( $R_{\beta\mu\nu}^\alpha = 0$ ) должно быть их решением;
- 3) число уравнений должно быть равно числу независимых переменных  $g_{\mu\nu} = 10$  (т. е. равно 10);
- 4) быть дифференциальными уравнениями второго порядка, переходящими в случае слабой гравитации в ньютоновские  $\Delta\varphi = 0$ .

Этим условиям удовлетворяют уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{или} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (1.20)$$

В пустом пространстве они эквивалентны. Действительно, в слабом поле, т. е. когда  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , где  $\eta_{\mu\nu}$  — метрика Минковского,

$h_{\mu\nu} \ll 1$ , уравнение движения частицы:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \sim -\frac{\partial h_{44}}{\partial x^i},$$

т. е.  $h_{44}$  играет роль ньютоновского потенциала и уравнения Эйнштейна преобразуются в

$$\Delta(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = 0, \quad \text{где } h \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}.$$

Отсюда понятно, как модифицировать уравнение Эйнштейна в присутствии материи. Надо добавить в правую часть тензор второго ранга  $T_{\mu\nu}$ , такой, что в пределе  $T_{44}$  стремится к плотности энергии, равной плотности гравитационной массы. Это тензор энергии-импульса материи.

Поэтому уравнения примут вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}.$$

Теперь второй член в левой части необходим для согласованности уравнений, ибо теперь, вообще говоря,  $R \neq 0$ , а  $g^{\mu\nu}\nabla_\mu T_{\nu\mu} = 0$ .

В слабом поле получаются уравнения Ньютона. Действительно, рассмотрим движение медленной материальной точки в слабом гравитационном поле

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Если  $v \ll c$  и гравитационное поле слабое, т. е.  $g_{\mu\nu} \approx (1, 1, 1, -1)$  и не зависит от  $t$ , то, взяв за параметр  $s$  время  $t$ , получаем

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + c^2\Gamma_{44}^i = 0; \quad x^4 = ct; \quad \Gamma_{44}^i = \Gamma_{i,44} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}.$$

Вспомним, что  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)$ , или

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \quad \text{где } g_{44} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}.$$

Уравнения Эйнштейна  $R_{ik} = -k \left( T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)$ , где  $T_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu$ ;  $T_{44} = \mu_0 c^2$ ;  $T = -\mu_0 c^2$  — тензор энергии-импульса, при  $v \ll c$  примут вид

$$R_{44} = -\frac{1}{2} k \mu_0 c^2; \quad R_{44} \approx -\frac{\partial T_{44}^\alpha}{\partial x^\alpha};$$

$$\Gamma_{44}^\alpha \approx -\Gamma_{\alpha,44} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_\alpha^2} = -\frac{\Delta \Phi}{c^2}.$$

Окончательно получаем, что  $\Delta \Phi = \frac{1}{2} k c^2 \mu_0$ .

Утверждение, что при малых массах и скоростях уравнения Эйнштейна переходят в уравнения Ньютона, называется *принципом соответствия*.

## Решение Шварцшильда

Найдем стационарное, сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна — аналог ньютона

$$\varphi = -G \frac{M}{r}.$$

Запишем метрику в виде  $d\rho^2 = c^2 dt^2 g_{00} - g_{11} dr^2 - r^2 d\Omega^2$ ;  $g_{00} = e^\nu$ ;  $g_{11} = e^\lambda$ . Из стационарности и сферической симметрии следует, что  $g_{00} = g_{00}(r)$ ,  $g_{11} = g_{11}(r)$ . Для коэффициентов в  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  и  $R_{\mu\nu}$  имеем  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \Theta$ ,  $x^3 = \varphi$ ,  $a' = \frac{\partial a}{\partial r}$ ,  $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t}$  и

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \lambda'/2; & \Gamma_{10}^0 &= \nu'/2; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta; \\ \Gamma_{11}^0 &= (\dot{\lambda}/2) e^{\lambda-\nu}; & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}; & \Gamma_{00}^1 &= (\nu'/2) e^{\nu-\lambda}; \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r; & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \Theta; & \Gamma_{00}^0 &= \dot{\nu}/2; \\ \Gamma_{10}^1 &= \dot{\lambda}/2; & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \Theta e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Составляя уравнение  $R_{\mu\nu} = 0$ , получаем

$$\dot{\lambda} = 0; \quad e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0; \quad e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

откуда  $\nu + \lambda = f(t)$ . При замене  $t \rightarrow t'(t)$ ,  $\nu \rightarrow \tilde{\nu} = \nu - \ln\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2$  можно обратить  $f(t)$  в 0. После чего получаем решение

$$g_{00} = 1 - r_g/r, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - r_g/r},$$

где  $r_g$  — некая константа. При  $r \rightarrow \infty$   $g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{r}$ ,  $\Phi = -\frac{r_g c^2}{2} \frac{1}{r}$ . Сравнивая  $\Phi$  с  $\Phi_H = -\frac{GM}{r}$ , получаем  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ . Эту величину называют *гравитационным радиусом*. Простые вычисления дают  $r_g$ (Солнца) = 3 км,  $r_g$ (Земли) = 0.44 см.

Это решение корректно для  $r > r_g$ . При  $r = r_g$  решение имеет сингулярность.

## Движение перигелия Меркурия и искривление световых лучей

Уравнения движения материальной частицы

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2, \quad (1.21)$$

и для движения света

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.22)$$

могут быть выведены из вариационного принципа  $S = \int L d\lambda$ , где  $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ .

Для случая, когда  $g_{\mu\nu}$  — метрика Шварцшильда, имеется два интеграла движения:

1) вследствие центральной симметрии сохраняется момент количества движения, т. е. плоскость движения ( $\Theta = \pi$ ) и величина  $M = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$ ;

2) вследствие стационарности сохраняется «энергия»:  $\varepsilon = g_{00} \frac{dt}{d\tau}$  (в случае (1.22),  $\tau = \lambda$ ).

Итак, имеем дополнительное условие

$$(1 - r_g/r)c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{1 - r_g/r} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = qc^2$$

( $q = 1$  для частицы с  $m \neq 0$ ;  $q = 0$  для света) и два интеграла движения:  $(1 - r_g/r)c^2 \frac{dt}{d\tau} = \varepsilon$  — энергия и  $r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = M$  — момент.

Из них мы получаем

$$\frac{M^2}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \left( qc^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) (1 - r_g/r).$$

Сделав замену  $r = \frac{1}{u}$ , получаем

$$\begin{aligned} M^2 \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 &= \frac{\varepsilon^2}{c^2} - (qc^2 + M^2 u^2)(1 - r_g u) = \\ &= \left( \frac{\varepsilon^2}{c^2} \right) + qc^2 r_g u - M^2 u^2 + r_g M^2 u^3 - qc^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Движение происходит в потенциальном поле.

### Случай массивной частицы ( $q = 1$ )

Продифференцировав (1.23), получаем

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \alpha(1 + \lambda u^2), \quad (1.24)$$

где  $\alpha = \frac{c^2 r_g}{2M^2} = \frac{Gm}{M^2}$ ,  $\lambda = \frac{3M^2}{c^2}$  — малый параметр (напомним, что  $M$  — это момент частицы, а  $m$  — масса солнца).

В нулевом приближении  $u = \alpha(1 - \varepsilon \cos \varphi)$ . Если  $\lambda = 0$ , то  $u$  — периодическая функция  $\varphi$ , при  $\lambda \ll 1$  период мало отличен от  $2\pi$  и решение ищем в виде ряда Фурье. С точностью до первого порядка

по  $\lambda$  имеем

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \lambda\beta_0 - \alpha \cos \rho\varphi + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k \cos k\rho\varphi; \\ u'' &= \rho^2 \left( a\varepsilon \cos \rho\varphi - \lambda \sum_k k^2 \beta_k \cos k\rho\varphi \right); \\ \lambda u^2 &= \lambda\alpha^2 (1 - 2\varepsilon \cos \rho\varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \rho\varphi). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Уравнение (1.24) теперь можно переписать так:

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda\beta_0 - \alpha\varepsilon(\rho^2 - 1) \cos \rho\varphi - \lambda \sum_k (k^2 - 1) \beta_k \cos k\rho\varphi_0 &\simeq \\ &\simeq \alpha (1 + \lambda\alpha^2 (1 - 2\varepsilon \cos \rho\varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \rho\varphi)). \end{aligned}$$

Приравнивая члены при  $\cos \rho\beta$  и  $\cos 2\rho\varphi$ , получаем

$$\beta_0 = \alpha^3 (1 + \frac{\varepsilon^2}{2}); \quad 1 - \rho^2 = 2\lambda\alpha^2; \quad -3\beta_2 = \alpha^3 \frac{\varepsilon^2}{2}; \quad \rho \approx 1 - \lambda\alpha^2.$$

Откуда угол между двумя перигелиями получается из формулы

$$\Phi = 2\pi (1 + \lambda\alpha^2) = 2\pi + 6\pi \frac{G^2 m_{\text{солнца}}^2}{M^2 c^2}.$$

Для Меркурия эта поправка приводит к смещению на  $43''$  в столетие. Это хорошо согласуется с опытом в пределах ошибок. Релятивистский эффект в поле  $\frac{1}{r}$  в 6 раз меньше.

## Случай света ( $q = 0$ )

В этом случае, продифференцировав (1.23), получим

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - u^2 + r_g u^3, \quad (1.26)$$

где  $\rho = \frac{M}{c\varepsilon}$  — прицельное расстояние. В нулевом приближении решения уравнения  $\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - u^2$  имеют вид  $u = \frac{1}{\rho} \cos(\varphi - \varphi_0)$ .

Это уравнение прямой, проходящей на расстоянии  $\rho$  от Солнца. Угол между двумя нулями  $u_0(\varphi)$ , т. е. асимптотами, равен  $\pi$ . Продифференцировав (1.26) по  $\varphi$ , получим

$$u'' + u = \frac{3}{2}r_g u^2.$$

Чтобы найти поправку, будем искать решение в виде  $u = u_0 + r_g u_1 + \dots$ , тогда

$$\begin{aligned} u_0'' + u_0 &= 0; \quad u_0 = A \cos \varphi, \quad (A = 1/\rho); \\ u_1'' + u_1 &= \frac{3}{2}u_0^2 = \frac{3}{2}A^2 \cos^2 \varphi, \quad r_g — \text{малый параметр.} \end{aligned}$$

Получаем решение  $u_1 = \frac{3}{4}A^2 - \frac{1}{4}A^2 \cos 2\varphi + B \cos \varphi + C \sin \varphi$ . Из условия  $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\rho} - u^2 + r_g u^3$  следует, что  $A = \frac{1}{\rho}$ ;  $B = 0$ ,  $C$  определяет произвол в начале отсчета  $\varphi$ , поэтому положим  $C = 0$ .

Направление на бесконечности  $\varphi_\infty$  определяется условием

$$\begin{aligned} u(\varphi_\infty) &= u_0(\varphi_\infty) + r_g u_1(\varphi_\infty) = 0; \\ A \cos \varphi_\infty + r_g \left( \frac{3}{4}A^2 - \frac{1}{4}A^2 \cos 2\varphi_\infty \right) &= 0; \\ \varphi_\infty &= \frac{\pi}{2} + r_g A. \end{aligned}$$

Таким образом, отклонение луча

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_\infty - \varphi_0) = 2r_g A = \frac{2r_g}{\rho}.$$

## Изотропные модели Фридмана

Распределение вещества во Вселенной однородно и изотропно. Это подтверждается современными астрономическими наблюдениями. Естественно предположить, что и метрика также однородна и изотропна. В этом случае скалярная кривизна  $\lambda$  трехмерной метрики  $\gamma_{jk}$  постоянна (мы считаем, что  $ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{ik} dx^i dx^k$ ). Возможны три случая:

- 1)  $\lambda > 0$  — пространство постоянной положительной кривизны.  
Примером является сфера  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ .
- 2)  $\lambda < 0$  — пространство постоянной отрицательной кривизны,  
пространство Лобачевского.
- 3)  $\lambda = 0$  — плоское евклидово пространство.

**Случай 1.** Метрика пространства совпадает с метрикой трехмерной сферы радиуса  $R$ ,  $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, y) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y^2 = R^2\}$ :  $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dy^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ . Кривизна  $\lambda = \frac{1}{R}$ , где  $R$  — радиус сферы или радиус кривизны. Введем в пространстве  $(x_1, x_2, x_3)$  сферические координаты  $R, \theta, \varphi$ . Тогда

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2).$$

В этих координатах длина окружности равна  $2\pi r$ , а радиус этой окружности равен  $\int \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = R \arcsin \frac{r}{R} = R\chi$ , где  $\chi$  — новая координата и  $r = R \sin \chi$ .

Новые координаты  $\chi, \theta, \varphi$  — это сферическая параметризация трехмерной сферы и метрика в них выражается как

$$dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)).$$

В этих координатах площадь сферы радиуса  $\chi$  равна  $4\pi R^2 \sin^2 \chi$ , а объем всего пространства  $V = 2\pi^2 R^3$  конечен.

**Случай 2.** При  $\lambda < 0$  проще всего получить метрику, сделав замену  $R \rightarrow iR$  в предыдущем случае. Тогда

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2),$$

или после введения новой координаты такой, что  $r = R \operatorname{sh} \chi$

$$dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)).$$

**Случай 3.**  $\lambda = 0$ . Это привычное евклидово пространство с метрикой

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

или в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2).$$

Кардинальным шагом Фридмана (1922 г.) был отказ от стационарности Вселенной. Фридман предположил, что во всех случаях  $R = R(t)$ . Последующие наблюдения Хаббла (1925–1927 года) подтвердили это предположение.

При исследовании метрики удобна сопутствующая система, в которой данная частица вещества (галактика) поконится. Выберем время  $t$  так, чтобы  $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$ . Это означает, что  $t$  — собственное время частицы.

### Случай 1. Закрытая модель. $\lambda > 0$

При нашем выборе метрика равна

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)).$$

Введем новую координату  $\eta$  так, чтобы  $c dt = R(\eta) d\eta$ . Тогда

$$ds^2 = R^2(\eta) (d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)).$$

Выпишем компоненты метрического тензора, символы Кристоффеля и компоненты тензора Риччи.

$$\begin{aligned} g_{00} &= R^2(\eta), & g_{11} &= -R^2(\eta), \\ g_{22} &= -R^2(\eta) \sin^2 \chi, & g_{33} &= -R^2(\eta) \sin^2 \chi \sin^2 \theta; \\ \Gamma_0^0 &= \frac{R'(\eta)}{R(\eta)}, & \Gamma_{ik}^0 &= \frac{R'(\eta)}{R^3(\eta)} g_{ik}, & \Gamma_{0k}^i &= \frac{R'(\eta)}{R(\eta)} \delta_k^i, & \Gamma_{0i}^0 &= \Gamma_{00}^i = 0. \end{aligned}$$

Здесь штрих означает производную по  $\eta$  ( $R'(\eta) = \frac{dR}{d\eta}$ ). Единственная ненулевая величина  $R_0^0$  равна  $R_0^0 = -\frac{3}{R^4(\eta)}((R'(\eta))^2 - R(\eta)R''(\eta))$ , а скалярная кривизна равна

$$R = -\frac{6}{R^3(\eta)}(R(\eta) + R''(\eta)).$$

Тогда

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{3}{R^4(\eta)}(R^2(\eta) + (R'(\eta))^2).$$

Обозначим ту же компоненту тензора энергии-импульса  $T_0^0$  через  $\varepsilon(\eta)$ .

Уравнение Эйнштейна превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{R^4(\eta)} \left( R^2(\eta) + (R'(\eta))^2 \right) = \frac{8\pi}{c^4} \gamma \varepsilon(\eta). \quad (1.27)$$

Сделаем предположение, что взаимодействием вещества можно пренебречь, т. е. давление  $p = 0$  и  $\varepsilon(\eta) = c^2 \mu(\eta)$ , где  $\mu(\eta)$  — плотность материи (массы). Эта модель называется *пылевидной материеей*. Кроме того, можно считать, что общая масса вещества во Вселенной

$$M = 2\pi^2 R^3(\eta) \mu(\eta) = \text{const}, \quad \text{или} \quad \mu(\eta) = \frac{M}{2\pi^2 R^3(\eta)}.$$

Эти предположения называются уравнениями состояния. Подставляя их в уравнение (1.27), получаем

$$\begin{aligned} \frac{3}{R(\eta)} \left( R^2(\eta) + (R'(\eta))^2 \right) &= \frac{4M\gamma}{\pi c^2}, \\ \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{4\gamma M}{3\pi c^2} R - R^2}} &= \pm\eta + \text{const}. \end{aligned}$$

Выделяя полный квадрат и обозначая  $\frac{2\gamma M}{3\pi c^2} = R_0$ , получаем

$$\arcsin \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right) = \pm\eta + \text{const}.$$

Стандартный выбор знака и константы интегрирования приводит к окончательному результату

$$R(\eta) = R_0(1 - \cos\eta).$$

Чтобы найти  $t$ , подставим полученное выражение в уравнение  $c dt = R(\eta) d\eta$ , тогда

$$t = \frac{R_0}{c} \int (1 - \cos \eta) d\eta = \frac{R_0}{c} (\eta - \sin \eta).$$

Окончательный ответ

$$\begin{cases} R = R_0(1 - \cos \eta), \\ t = \frac{R_0}{c}(\eta - \sin \eta), \\ R_0 = \frac{2\gamma M}{3\pi c^2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что радиус Вселенной  $R(t)$  изменяется по циклоиде, возрастаая от 0 при  $t = 0$  до максимального значения  $R = 2R_0$  при  $t = \frac{\pi R_0}{c}$ , а затем убывая до 0 при  $t = \frac{2\pi R_0}{c}$ .

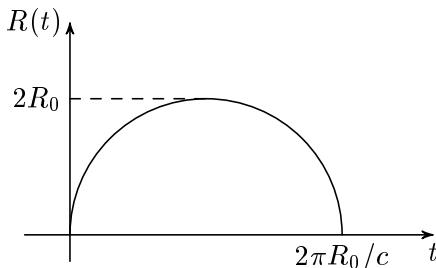


Рис. 1.5.

Учет давления не меняет факта сингулярности.

## Случай 2. Открытая модель. $\lambda < 0$

Как и в закрытой модели, при нашем выборе метрика равна

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)).$$

Так же, как и в закрытой модели, вводим новую координату  $\eta$  такую, что  $c dt = R(\eta) d\eta$ . После аналогичных вычислений компонент метрического тензора, символов Кристоффеля и компонент тензора Риччи,

уравнение Эйнштейна превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{R^4(\eta)} \left( (R'(\eta))^2 - R^2(\eta) \right) = \frac{8\pi}{c^4} \gamma \varepsilon(\eta).$$

Решая его в модели пылевидной материи и предполагая, как и в закрытой модели, что  $2\pi\mu(\eta)R^3(\eta) = M = \text{const}$ , получаем

$$\begin{cases} R = R_0(\operatorname{ch} \eta - 1), \\ t = \frac{R_0}{c}(\operatorname{sh} \eta - \eta), \\ R_0 = \frac{2\gamma M}{3\pi c^2}. \end{cases}$$

Интересно, что во всех трех моделях в точке сингулярности  $t \sim 0$  радиус Вселенной ведет себя одинаково:  $R(t) \sim t^{2/3}$ .

## ЧАСТЬ 2

# КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

### 1. Введение

#### Интерференция электронов

Представим себе мысленный эксперимент:  $S$  излучает электроны, а детектор  $D$  регистрирует их. Они попадают по отдельности на экран  $B$ , как отдельные частицы. Мы измеряем вероятность  $P$  попадания за 1 сек электронов в детектор на расстоянии  $x$  от оси.

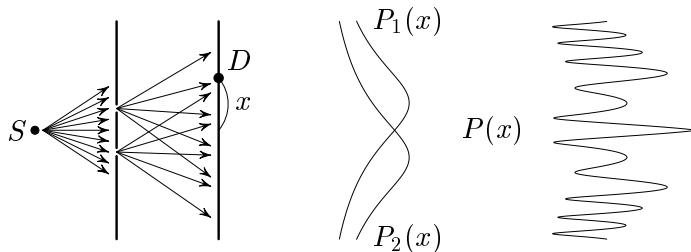


Рис. 2.1.

Поскольку электроны ведут себя как частицы, можно было бы предположить, что каждый проходит через одно из отверстий и в случае двух открытых отверстий вероятность попадания в точку  $x$  была бы суммой вероятностей  $P_{\text{в}} = P_a + P_b$ . Но опыт дает другую картинку. На самом деле  $P(x)$  совпадает с распределением интенсивности при интерференции волн. Поэтому (по аналогии) можно предположить, что существует амплитуда вероятности  $\varphi(x)$  такая, что

$$P(x) = |\varphi(x)|^2, \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \\ P_1(x) = |\varphi_1|^2, \quad P_2(x) = |\varphi_2|^2.$$

Мы вычисляем интенсивность волн, которые достигли бы прибора, а затем интерпретируем эту интенсивность как вероятность.

Как оказывается влияние наблюдения на этот эксперимент?

Попробуем определить, через какое отверстие проходит электрон, например, с помощью света. Свет рассеивается на электронах. Это явление называется *эффектом Комптона*.

В результате мы точно знаем, что электрон проходит либо через отверстие 1, либо через отверстие 2. В этом случае  $P = P_1 + P_2$ .

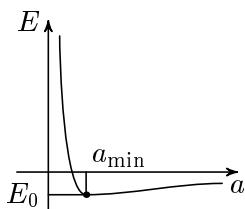
Но, используя свет, мы вносили возмущение в поведение электронов. Какова его интенсивность? Вспомним, что свет состоит из фотонов, каждый из которых имеет энергию  $E = h\nu$  и импульс  $p = h/\lambda$ . Если мы зарегистрировали рассеянный на электроне фотон (и следовательно, узнали через какое отверстие прошел электрон), то фотон передал электрону импульс порядка  $h/\lambda$  и мы получили неопределенность такого же порядка в регистрации положения электрона. Ослабить влияние света на электрон можно увеличивая  $\lambda$ , но это приведет к уменьшению точности, с которой мы определяем, где проходит электрон. Неточности  $\Delta x$  и  $\Delta p$  в измерении координат и импульса электрона связаны поэтому соотношением неопределенности Гейзенберга  $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$ .

Парадокса в утверждении, что электрон — это *частица—волна* не возникает, если любое физическое вмешательство с целью определить, через какое отверстие проходит электрон, приводит к искажению опыта и интерференция исчезает.

В силу этого с каждой постановкой опыта связан отказ от одной из двух сторон описания физического явления. Эти две стороны являются *дополнительными* одна к другой. Этот принцип называют *принципом дополнительности Бора*.

Применяя принцип неопределенности к атому водорода, можно оценить размер этого атома. Пусть  $a$  — размер атома водорода,  $V(r)$  — потенциал кулоновского взаимодействия,  $T$  — кинетическая энергия, тогда

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{e^2}{r}, & \Delta x &= a, & \Delta p &= \hbar/a, \\ p &\sim \hbar/a, & T &= \frac{\hbar^2}{2ma^2}, & E_{\text{полн}} &= \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \end{aligned}$$



Получаем, что существует размер  $a$ , при котором  $E_{\text{полн}}$  минимальна. Легко видеть, что  $a_{\min} = \frac{\hbar^2}{me^2}$  — размер атома водорода в теории Бора,  $E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$  — энергия атома водорода в основном состоянии.

Рис. 2.2.

Увеличивая число отверстий и экранов в эксперименте по интерференции электронов, мы приходим к идею Р. Фейнмана интеграла по путям в квантовой теории. Можно считать, что пространство в каждом месте состоит из таких «отверстий».

Разбирая подобные задачи и сравнивая их решения с экспериментальными данными, создатели квантовой механики (Гейзенберг, Шредингер, Дирак, Бор, Борн, Де Бройль и др.) пришли к открытию — состояние частицы является вектором, наблюдаемая — это линейный оператор, действующий на таких векторах, и мы можем определять только собственные значения этих операторов.

## Математика квантовой механики

В классической механике полное описание состояния физической системы осуществляется заданием всех ее координат и скоростей. По этим начальным данным уравнения движения полностью определяют поведение системы во все будущие моменты времени. В квантовой механике такое описание невозможно, поскольку координаты и соответствующие им скорости не измеримы одновременно. Описание состояния квантовой системы определяется меньшим числом величин, чем в классической механике, т. е. является менее подробным, чем классическое.

**Определение.** Наборы физических величин, обладающие тем свойством, что эти величины измеримы одновременно, причем если они имеют одновременно определенные значения, то уже никакая другая физическая величина (не являющаяся функцией от них) не может иметь в этом состоянии определенного значения, будем называть *полными наборами*.

Дадим набор основных принципов квантовой теории.

(1) *Состояние* квантовомеханической системы будем понимать как вектор в некотором (гильбертовом) пространстве. Обозначение:  $|A\rangle$ . Обычно это пространство функций.

Пусть в состоянии  $|A\rangle$  некоторое измерение приводит с достоверностью к результату 1, а в состоянии  $|B\rangle$  — к результату 2. Тогда принимается, что всякая линейная комбинация  $\alpha|A\rangle + \beta|B\rangle$  описывает состояние, в котором то же измерение даст либо результат 1, либо результат 2. Иначе можно сказать, что некоторое состояние может быть рассмотрено как суперпозиция других состояний. (Пример — прохождение электрона через одну щель и через другую щель в описанном выше опыте.) Т. е. суперпозиция — это линейная комбинация.

Эти утверждения составляют содержание *принципа суперпозиции* — основного положительного принципа квантовой механики.

(2) Наблюдаемые, или физические величины, будут линейными операторами в упомянутом гильбертовом пространстве. (Операторы будут обозначаться буквами со шляпкой —  $\hat{f}$ , а иногда и без шляпки, когда понятно, что  $f$  — оператор). Возможны состояния, значения величины в которых фиксированы: такими состояниями будут собственные векторы оператора. В других состояниях физическая величина не может иметь определенного значения.

(3) В пространстве введена *эрмитова метрика*. Считаем, что наблюдаемым отвечают самосопряженные операторы. Собственные значения такого оператора (значения наблюдаемой) вещественны. (Формально можно рассматривать также и комплексные физические величины.)

(4) Полный набор наблюдаемых соответствует такому набору коммутирующих между собой операторов, что набор их собственных значений полностью задает вектор пространства.

Более точно — состояние определяется не вектором, а направлением. В наших рассуждениях будем считать векторы нормированными (там, где это возможно).

Пусть  $|\psi\rangle$  не является собственным вектором для наблюдаемой  $\hat{Q}$ . Пусть  $\psi_n$  — набор ее собственных векторов:  $\hat{Q}\psi_n = q_n\psi_n$ . Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Поэтому можно рассмотреть состояние  $\psi$  как суперпозицию  $\psi = \sum c_n\psi_n$ . Квадрат модуля  $|c_n|^2$  каждого

из коэффициентов данного разложения определяет вероятность соответствующего значения  $q_n$  величины  $\hat{Q}$ .

Введем понятие *среднего значения*  $\langle Q \rangle$  величины  $\hat{Q}$  в данном состоянии  $|\psi\rangle$ :

$$\langle Q \rangle = \sum q_n |c_n|^2 = (\psi, \hat{Q}\psi),$$

где  $(\cdot, \cdot)$  обозначает эрмитово скалярное произведение в нашем пространстве.

## 2. Общие принципы

### Принцип детерминизма в квантовой механике

Зная в начальный момент времени  $t = 0$  состояние  $|\psi\rangle$  квантовой системы, мы должны уметь определять состояния  $|\psi_t\rangle$ ,  $t > 0$ . Введем (линейный) оператор эволюции

$$|\psi_t\rangle = U(t, t_0)|\psi_0\rangle.$$

Поскольку мы считаем  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ , оператор эволюции унитарен:  $U^+U = I$ .

Пусть в начальный момент времени  $t_a$  известна координата частицы  $x_a$ . (Будем обозначать символом  $|x\rangle$  состояние с известной координатой, равной  $x$ .)  $|\psi_t\rangle$  — состояние в некоторый последующий момент времени  $t$ . Представим его как суперпозицию всех возможных состояний с известными координатами:

$$|\psi_t\rangle = \int (\mathcal{K}(t_b, x_b; t_a, x_a)|x\rangle) dx,$$

где  $\mathcal{K}(t_2, x_2; t_1, x_1)$  — амплитуда распространения от положения  $|x_1\rangle$  в момент времени  $t_1$  до положения  $|x_2\rangle$  в момент времени  $t_2$ . Заметьте, что в аргументах некоторых величин время возрастает справа налево.

### Динамический принцип

Динамический принцип квантовой механики заключается в том, что амплитуда перехода из  $|x_0\rangle$  в  $|x\rangle$  за время  $t$  получается суммированием

по всем возможным траекториям,  $x(\tau)$ , ведущим из  $x_0 = x(t_0)$  в  $x = x(t)$ :

$$\mathcal{K}(t_b, x_b; t_a, x_a) = \sum_{\text{по всем траекториям}} \mathcal{A}(x(\tau)),$$

где  $\mathcal{A}$  — фаза вклада траектории:

$$\mathcal{A}(x(\tau)) = N \exp \left( \frac{iS[x(\tau)]}{\hbar} \right),$$

а функционал действия

$$S[x(\tau)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}) d\tau, \quad x(t_a) = x_a, \quad x(t_b) = x_b.$$

Континуальной сумме в определении фейнмановского пропагатора можно придать некоторую математическую строгость. Именно, вместо того чтобы рассматривать все непрерывные траектории, разобьем временной отрезок  $[t_a, t_b]$  на  $N$  равных частей длины  $\varepsilon = (t_b - t_a)/N$ :  $t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_b$ , и ограничимся кусочно-линейными траекториями. Каждая такая траектория определяется выбором узловых точек  $(t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_{N-1}, x_{N-1})$ , где  $x_1, \dots, x_{N-1}$  — любые. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t_b, x_b; t_a, x_a) &\sim \\ &\sim C \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \dots \int dx_1 \exp \left( \frac{iS[x(t_0, t_1, \dots, t_N)]}{\hbar} \right). \end{aligned}$$

Увеличивая количество точек разбиения (уменьшая  $\varepsilon$ ), мы сможем получить более полное представление множества всех траекторий. Необходимо определить нормировочный множитель  $C$ , который, на самом деле, зависит от  $\varepsilon$ .

Например, в случае лагранжиана вида  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x, t)$  нормировочный множитель равен  $C^{-N}$ , где

$$C = \left( \frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2},$$

$$\mathcal{K}(t_b, x_b; t_a, x_a) = \frac{1}{C} \int \int \dots \int e^{(i/\hbar)S[a,b]} \frac{dx_1}{C} \frac{dx_2}{C} \dots \frac{dx_{N-1}}{C},$$

где  $S[a, b] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$  представляет собой однократный интеграл вдоль кусочно-линейной траектории.

Возможны неудобства, связанные с нашим определением суммы по траекториям. Тем не менее идея сохраняет смысл, несмотря на недостатки отдельных построений.

## Уравнение Шредингера

Пусть

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int \frac{1}{C} \exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right) \psi(y, t) dy$$

(здесь  $y$  — координата на прямой в момент  $t$ ). Применяя это к частице в потенциале  $V(x)$ , т. е. при  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$ , получим

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int \frac{1}{C} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon}} \exp\left(\frac{-i\varepsilon V\left(\frac{(x+y)}{2}\right)}{\hbar}\right) \psi(y, t) dy.$$

Из-за быстрой осцилляции первой экспоненты  $y$  близко к  $x$ . Пусть  $y = x + \eta$ ,

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \int \frac{1}{C} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m\eta^2}{2\varepsilon}} e^{\frac{-i\varepsilon V(x+\eta/2)}{\hbar}} \psi(x + \eta, t) d\eta.$$

Основной вклад в интеграл вносят  $\eta \sim \sqrt{\frac{\varepsilon\hbar}{m}}$ . Функцию  $\psi$  нужно разложить в ряд и удержать лишь члены порядка  $\varepsilon$ , т. е. разложить до второго порядка по  $\eta$ . Получаем

$$\begin{aligned} \psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \\ &= \frac{1}{C} \int e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m\eta^2}{2\varepsilon}} \left(1 - \frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right) \left(\psi(x, t) + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) d\eta. \end{aligned}$$

Сравнение членов нулевого порядка дает  $C = \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m}\right)^{1/2}$ . В первом порядке по  $\varepsilon$  получаем

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} \int \eta^2 e^{\frac{i m \eta^2}{2 \hbar \varepsilon}} d\eta\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V \psi,$$

или

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi.$$

Окончательно

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad \text{где} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V. \quad (2.1)$$

Это уравнение называется *уравнением Шредингера*. Оно было получено Шредингером из других соображений. Вывод уравнения (2.1), приведенный здесь, принадлежит Р. Фейнману.

## Движение свободной частицы по прямой

Рассмотрим лагранжиан  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ . Амплитуда распространения

$$\mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int_{x(t_1)=x_1, x(t_2)=x_2} Dx(t) e^{i \frac{S}{\hbar}}.$$

Пусть  $x_0(t)$  — решение классического уравнения  $\delta S = 0$  с начальными условиями  $x_0(t_1) = x_1$ ,  $x_0(t_2) = x_2$ . В нашем случае имеем уравнение  $m\ddot{x} = 0$ , значит,  $x_0(t)$  линейна, а постоянные интегрирования находятся из граничных условий  $x_0(t) = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}t + \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{t_2 - t_1}$ . Представим  $x(t) = x_0(t) + \eta(t)$ . Элемент объема не меняется при сдвиге, значит,  $Dx(t) = D\eta(t)$ . Тогда для действия имеем:

$$S(x) = S(x_0) + S(\eta), \quad \text{где} \quad S(x_0) = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1},$$

$$S(\eta) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{\eta}^2}{2} dt, \quad \text{при условии } \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1) &= \exp \left( \frac{i m (x_2 - x_1)^2}{\hbar (t_2 - t_1)} \right) \int e^{i \frac{\hbar}{\hbar} S(\eta)} D\eta = \\ &= \exp \left( \frac{i m (x_2 - x_1)^2}{\hbar (t_2 - t_1)} \right) \mathcal{A}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Для того чтобы найти  $\mathcal{A}(t_1, t_2)$ , рассмотрим групповое соотношение, которому удовлетворяет функция распространения

$$\begin{aligned} U(t_2, t_1) &= U(t_2, t)U(t, t_1), \\ |\psi(t_2)\rangle &= U(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle, \quad t_1 < t_2, \end{aligned}$$

где  $U(t_2, t_1)$  — оператор эволюции. Тогда

$$\mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int \mathcal{K}(x_2, t_2; x, t)\mathcal{K}(x, t; x_1, t_1) dx, \quad t_1 < t < t_2. \quad (2.2)$$

Вспоминая вид функции распространения и замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}},$$

получаем такое уравнение:

$$\mathcal{A}(t_1, t)\mathcal{A}(t, t_2)\sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{m}}\sqrt{\frac{(t_2-t)(t-t_1)}{t_2-t_1}} = \mathcal{A}(t_1, t_2). \quad (2.3)$$

Положим  $F(t_1, t_2) = \mathcal{A}(t_1, t_2)\sqrt{\frac{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}{m}}$ . Тогда уравнение (2.3) эквивалентно уравнению  $F(t_1, t)F(t, t_2) = F(t_1, t_2)$ , решения которого даются формулой

$$F(t_1, t_2) = \frac{f(t_2)}{f(t_1)},$$

где  $f(t)$  — нормировка. Можно сделать замену и считать, что

$$\psi(t) \mapsto f(t)\psi(t), \quad U(t_2, t_1) \mapsto \frac{f(t_2)}{f(t_1)}U(t_2, t_1).$$

Тогда

$$\mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}} \exp\left(\frac{im(x_2-x_1)^2}{2\hbar(t_2-t_1)}\right),$$

т. е.  $|\mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1)|^2 \sim 1/(t_2 - t_1)$ .

**Следствие.** Плотность вероятности того, что частица останется в точке  $x_1$ , обратно пропорциональна времени.

## Уравнения движения

Мы знаем, что в классическом случае уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

что эквивалентно  $\delta S = 0$ .

Сделаем в выражении для амплитуды замену переменной интегрирования  $X(t) \rightarrow X(t) + \eta(t)$ ,  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ ,  $\eta \ll \hbar$ . Здесь  $X(t)$  — произвольная траектория, по которой идет интегрирование, а  $\eta(t)$  — фиксированная «малая» траектория с соответствующими условиями. Поскольку мера  $\mathcal{D}X(t)$  не меняется при сдвигах, мы получаем

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} &= \int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X+\eta(t)]}, \quad \text{или} \\ \int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} &= \\ &= \int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta(t) dt \right), \\ \int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} &= \\ &= \int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} \left( 1 + \frac{i}{\hbar} \int \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta(t) dt \right) + o\left(\left\|\frac{\eta}{\hbar}\right\|\right). \end{aligned}$$

Следовательно, в первом порядке малости по  $\left\|\frac{\eta}{\hbar}\right\|$  получаем

$$\int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} \int \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta(t) dt = 0,$$

или, поменяв порядок интегрирования,

$$\int \left( \int \mathcal{D}X(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) \eta(t) dt.$$

В силу произвольности  $\eta(t)$  окончательно имеем

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right\rangle := \int \mathcal{D}X(t) \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} = 0.$$

## Симметрии и интегралы движения

В классической механике с симметриями связана теорема Нёттер.

Предположим, что функция Лагранжа  $L(x, \dot{x}, t)$  не меняется при таких заменах  $x \rightarrow h(x, s)$  ( $s$  — параметр), что  $h(x, 0) = x$  и  $h(x, s) \sim \sim x + s\eta(x)$  при  $s \ll 1$  (т. е.  $\frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{s=0} = \eta$ ).

Тогда в классическом случае (для истинных траекторий) существует первый интеграл  $I(x, \dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(x)$  (см. с. 28) и  $\frac{d}{dt}I = 0$ . Рассмотрим вариацию вида

$$x \rightarrow x + s(t)\eta(x); \quad S \rightarrow S(x + s(t)\eta(x)) = S(x) + \int \dot{S}(t)I(x) dt.$$

Тогда на классической траектории

$$\int \dot{S}(t)I(x) dt = \int S(t)\dot{I}(x) dt = 0 \quad \text{для} \quad S(t_1) = S(t_2) = 0,$$

откуда  $\dot{I} = 0$ .

В квантовом случае, как и в предыдущем пункте, верно, что

$$\frac{d}{dt}\langle I \rangle = 0, \quad \text{где } \langle I \rangle := \int \mathcal{D}x(t) \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta(x) \right) e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} = 0.$$

Действительно, в квантовом случае вариацию  $x \rightarrow x + s(t)\eta(x(t))$  можно рассматривать как замену переменной в фейнмановском интеграле. Как и в предыдущем пункте, получаем наше утверждение.

**Следствие.** Вариациям функционалов в классическом случае соответствует замена переменной интегрирования в фейнмановском интеграле.

## Импульс

В классике, если частица свободная ( $L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ ), то  $L(x, \dot{x}) = L(x + \varepsilon, \dot{x})$  и импульс  $p = m\dot{x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  является первым интегралом. То же самое происходит в случае замкнутой системы нескольких частиц, если взаимодействие зависит только от  $|x_i - x_j|$ . В квантовом случае

$$\psi(x, t) = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} \psi(x, 0).$$

Сделаем замену

$$x(\tau) \rightarrow x(\tau) + \eta(\tau), \quad \eta(0) = 0, \quad \eta(t) = \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(x + \varepsilon, t) &= \int_{x(t)=x+\varepsilon} \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \psi(x, 0) \\ &= \int_{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[x(\tau) + \eta(\tau)]} \psi(x, 0) \\ &= \psi(x, t) + \frac{i\varepsilon}{\hbar} \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \psi(x, 0) \\ &\quad + \int \mathcal{D}x(\tau) \left( \int \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta(\tau) d\tau \right) e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \psi(x, 0). \end{aligned}$$

В силу квантовых уравнений движения последний член равен нулю и мы получаем

$$\begin{aligned} \psi(x + \varepsilon, t) &= \psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \\ &= \psi(x, t) + \frac{i\varepsilon}{\hbar} \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \psi(x, 0). \end{aligned}$$

Исходя из классической ситуации, естественно считать, что последнее слагаемое определяет оператор импульса

$$\widehat{p}\psi(x, t) := \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \psi(x, 0).$$

Получаем, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} \widehat{p}\psi, \quad \text{или} \quad \widehat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Мы получили замечательный факт:

*Импульс пропорционален генератору сдвига, т. е. генератору симметрии, при которой он сохраняется.*

## Собственные функции импульса

Рассмотрим задачу на собственные значения и вектора оператора импульса:

$$\hat{p}\psi_p = p\psi_p, \quad \text{или} \quad \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_p}{\partial x} = p\psi_p.$$

Следовательно, собственные функции  $\psi_p = ce^{\frac{i}{\hbar}px}$  — плоские волны. Кроме того, длина волны  $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ , а вероятность найти частицу в любом месте  $|\psi|^2 = c^2$  не зависит от  $x$ .

Нормировка  $\psi_p = ce^{\frac{i}{\hbar}px}$  получается из соотношения

$$\int \psi_p^*(x)\psi_{p'} dx = \delta(p - p').$$

Таким образом,

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Разложение произвольной волновой функции  $\psi(x)$  по собственным функциям ее импульса, называемое *импульсным представлением*, — это просто разложение в интеграл Фурье

$$\psi(x, t) = \int c(p, t)\psi_p(x) dp, \quad \text{где } c(p, t) = \int \psi(x, t)\psi_p^* dx.$$

## Коммутационные соотношения и соотношение неопределенности

Для операторов координаты  $\hat{x}$  и импульса  $\hat{p}$  выполнено следующее коммутационное соотношение:  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ . Это означает, что импульс и координату нельзя измерить одновременно.

Определим *неопределенность в измерении* наблюдаемой  $q$  как среднеквадратичное отклонение наблюдаемой от своего среднего, т. е. как квадрат дисперсии:  $\langle (\hat{q} - \bar{q})^2 \rangle$ .

Дальше следует стандартное доказательство неравенства между квадратом скалярного произведения и квадратами длин двух векторов.

Пусть  $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$  (в общем случае то же самое). Рассмотрим

$$\langle (\alpha\hat{x} + i\hat{p})(\alpha\hat{x} - i\hat{p}) \rangle \geq 0,$$

где  $H = \alpha\hat{x} - i\hat{p}$ ,  $H^+ = \alpha\hat{x} + i\hat{p}$ ,  $H^+H$  — эрмитов и положителен. Действительно,  $\|H\psi\|^2 = \langle\psi H^+ H\psi\rangle \geq 0$ . Следовательно,  $\alpha^2\langle\hat{x}^2\rangle + \alpha\hbar + \langle\hat{p}^2\rangle \geq 0$ , откуда из условия на дискриминант получаем соотношение неопределенности  $\langle\hat{x}^2\rangle\langle\hat{p}^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$ .

## Минимизация соотношения неопределенности. Волновые пакеты

Из предыдущих рассмотрений следует, что минимум достигается при  $\alpha = -\frac{\hbar}{2\langle\hat{x}^2\rangle}$  (это корень последнего квадратного уравнения при нулевом дискриминанте). В этом случае получаем, что  $\|H\psi\|^2 = 0$ ,  $H\psi = 0$ , т. е.

$$(\alpha\hat{x} - i\hat{p})\psi = 0, \quad \text{или} \quad -\frac{\hbar}{2\langle\hat{x}^2\rangle}x\psi = \hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi = Ne^{-\frac{x^2}{4\langle\hat{x}^2\rangle}}.$$

Обозначим  $\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{a^2}{2}$ , тогда  $\psi = Ne^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ . При этом можно посчитать среднее значение операторов  $\hat{x}^2$  и  $\hat{p}^2$  в состоянии  $\psi$ . По определению получаем  $\langle\hat{x}^2\rangle = \langle\psi|\hat{x}^2\psi\rangle = a^2/2$  и  $\langle\hat{p}^2\rangle = \langle\psi|\hat{p}^2\psi\rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2}$ .

В случае  $\bar{p} = p_0 \neq 0$  и  $\bar{x} = x_0 \neq 0$  волновая функция удовлетворяет уравнению

$$i(\hat{p} - p_0)\psi = -\frac{\hbar}{a^2}(x - x_0)\psi.$$

Решая это уравнение, получаем, что

$$\psi = Ne^{\frac{ip_0(x-x_0)}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}.$$

## Движение волнового пакета

Пусть свободная частица находилась при  $t = 0$  в состоянии

$$\psi = Ne^{\frac{ip_0(x-x_0)}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}.$$

Найдем, в какое состояние она перейдет через время  $t$ .

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \int K(x, t; y, 0)\psi(y, 0) dy = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}} \frac{N}{\sqrt{t}} \int e^{\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}} e^{\frac{ip_0(y-x_0)}{\hbar} - \frac{(y-x_0)^2}{2a^2}} dy = \dots\end{aligned}$$

(закончите вычисления самостоятельно).

Другой способ понять движение волнового пакета — это разложить волновую функцию по плоским волнам:

$$\psi(x, 0) = \int c(p, 0)e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp,$$

где величина  $|c(p, 0)|^2$  равна вероятности иметь импульс  $p$ . Тогда из уравнения Шредингера в импульсном представлении

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \psi$$

с начальным условием  $\psi(p, 0) = c(p, 0)$  следует, что

$$c(p, t) = c(p, 0)e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}}, \quad \psi(x, t) = \int c(p, 0)e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp.$$

Отсюда видно, что распределение по импульсам со временем не меняется:  $|c(p, 0)|^2 = |c(p, t)|^2$ , а распределение по координатам расплывается, поскольку частица с большим импульсом уходит за время  $t$  дальше.

## Гамильтониан

Пусть лагранжиан  $L(x, \dot{x})$  не зависит от времени явно (однородность по времени). Тогда

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} L(x(t-\varepsilon), \dot{x}(t-\varepsilon)) dt.$$

Разложим последний интеграл по  $\varepsilon$  до членов первого порядка, в том числе по верхнему и нижнему пределам:

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= S + \varepsilon \left( L(x(t), \dot{x}(t))|_{t_1}^{t_2} - \int \left[ \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} \right] dt \right) = \\ &= S + \varepsilon \left( L(x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \varepsilon \left( \int \dot{x} \left[ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] dt \right). \end{aligned}$$

В классике отсюда следует, что гамильтониан  $H \equiv \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$  является первым интегралом, т. е. сохраняется.

В квантовом случае

$$\psi(x, t) = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \psi(x, 0).$$

Сделаем замену

$$x(\tau) \rightarrow x(\tau + \varepsilon), \quad x(t + \varepsilon) = x, \quad t = \tau + \varepsilon, \quad \tau = t - \varepsilon \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(x, t + \varepsilon) &= \int_{x(t+\varepsilon)=x} \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \psi(x, 0) = \\ &= \int_{x(t+\varepsilon)=x} \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} L(x(t-\varepsilon), \dot{x}(t-\varepsilon)) dt} \psi(x, 0) = \\ &= \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} [S + \varepsilon(L(x(t), \dot{x}(t)) - \int [\frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x}] dt)]} \psi(x, 0) = \\ &= \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} [S + \varepsilon(L(x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \varepsilon(\int \dot{x} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt)]} \psi(x, 0) = \\ &= \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} [S] \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left( \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) - \right.} \\ &\quad \left. - \int \dot{x} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt \right) \psi(x, 0) = \\ &= \psi(x, t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} [S]} \left( \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \psi(x, 0) - \\ &\quad - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left( \int \left( \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar} [S]} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) \dot{x} dt \right) \psi(x, 0). \end{aligned}$$

В силу квантовых уравнений движения последний член равен нулю, и мы получаем

$$\begin{aligned}\psi(x, t + \varepsilon) &= \psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \\ &= \psi(x, t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}[S]} \left( \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) \psi(x, 0).\end{aligned}$$

Как в случае с импульсом, исходя из классической ситуации, естественно считать, что последнее слагаемое определяет оператор гамильтониана  $\hat{H}$

$$\hat{H}\psi(x, t) := \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}[S]} \left( \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) \psi(x, 0).$$

Получаем, что

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \hat{H}\psi, \quad \text{или} \quad \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Итак, мы получили второй замечательный факт:

*Гамильтониан пропорционален генератору симметрии, при которой он сохраняется.*

## Квантовые скобки Пуассона

*Скобками Пуассона* в классической теории называется

$$\{u, v\} := \sum_k \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right).$$

Выполняются следующие свойства скобок Пуассона:

- 1)  $\{u, v\} = -\{v, u\};$
- 2)  $\{u, \text{const}\} = 0;$
- 3)  $\{u_1 + u_2, v\} = \{u_1, v\} + \{u_2, v\};$
- 4)  $\{u, v_1 + v_2\} = \{u, v_1\} + \{u, v_2\};$
- 5)  $\{u_1 u_2, v\} = \{u_1, v\} u_2 + u_1 \{u_2, v\};$
- 6)  $\{u, v_1 v_2\} = \{u, v_1\} v_2 + v_1 \{u, v_2\};$
- 7)  $\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0.$

Наблюдаемые в квантовой теории не коммутируют, поэтому попробуем найти условия на скобки Пуассона, считая, что в квантовой теории должны выполняться те же свойства. Рассмотрим выражение  $\{u_1 u_2, v_1 v_2\}$ . Его можно вычислить двумя способами. Сравнивая результаты, получаем

$$\{u_1, v_1\}(u_2 v_2 - v_2 u_2) = (u_1 v_1 - v_1 u_1)\{u_2, v_2\}.$$

Поскольку все эти наблюдаемые независимы, естественно положить

$$i\hbar\{u, v\} = uv - vu.$$

## Представление Гейзенберга

Сравним два представления Шредингера

$$\begin{cases} \psi(t) = U(t)\psi_0, \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad \psi(0) = \psi_0. \end{cases}$$

Последнее уравнение можно формально решить:  $\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi_0$ . Отсюда получаем, что оператор эволюции  $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ ,  $U^{-1}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$ . Пусть  $\hat{q}(t) = U(t)\hat{q}U^{-1}(t)$ , где наблюдаемая  $\hat{q}$  не зависит от времени. Тогда

$$i\hbar \frac{\partial \hat{q}(t)}{\partial t} = [\hat{H}(t), \hat{q}(t)], \quad \text{или} \quad \frac{\partial \hat{q}(t)}{\partial t} = \{\hat{H}(t), \hat{q}(t)\},$$

где  $i\hbar\{\hat{H}(t), \hat{q}(t)\} = [\hat{H}(t), \hat{q}(t)]$ .

Следовательно,  $\hat{H}$  — оператор энергии. Мы получили, что при  $\hbar \rightarrow 0$  квантовая теория переходит в классическую (уравнения движения по форме остаются теми же, а наблюдаемые начинают коммутировать между собой).

## Стационарные состояния

Пусть в начальный момент  $\psi_0$  — собственная функция гамильтониана ( $\hat{H}\psi_0 = E\psi_0$ ). Тогда  $\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi_0$ . При этом  $|\psi|^2$  не зависит

от времени. Такие состояния называют *стационарными*.  $E$  называют *уровнем энергии*. Если данному значению  $E$  соответствует не одна, а несколько собственных функций, то такой уровень называют *вырожденным*.

## Основные свойства уравнения Шредингера

Из уравнения Шредингера не следует никаких ограничений на волновую функцию  $\psi$ . Обычно выдвигают следующие физические требования:

- 1) волновая функция однозначна и непрерывна во всем пространстве (даже при разрывности потенциала  $V$ );
- 2) в области, где  $V = \infty$ ,  $\psi \equiv 0$ ;
- 3) в области, где  $V \neq \infty$ , должны быть непрерывны и производные волновой функции.

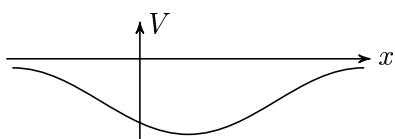


Рис. 2.3.

Из требования (1) следует, что на границе области  $\{V = \infty\}$  волновая функция должна быть непрерывна, но этого нельзя сказать об ее производных.

Энергетические уровни системы больше минимального значения потенциала, т. е.  $E_n > V_{\min}$ .

Если  $V$  имеет вид, как на рис. 2.3, то спектр отрицательных собственных значений энергии дискретен, а положительных — непрерывен.

## Вариационный принцип

Уравнение  $H\psi = E\psi$  при условии  $\int \psi\psi^* dx = 1$  можно получить как уравнение Эйлера—Лагранжа в задаче на условный экстремум функционала  $S_1[\psi, \psi^*] = \int \psi^* H \psi dx$  при условии  $\int \psi\psi^* dx = 1$ . При этом  $E$  можно рассматривать как множитель Лагранжа в этой задаче.

Предыдущие рассуждения являются основой для прямого вариационного метода. Сужение класса функций до явно заданного и зависящего от параметра превращает решение уравнения Шредингера в задачу на отыскание минимума функционала.

Если известны волновые функции  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  первых  $n$  состояний, расположенных в порядке возрастания энергии, то на волновой функции  $\psi$  следующего состояния достигается минимум функционала  $\int \psi^* H \psi dx$ , при условиях  $\int \psi \psi^* dx = 1$  и  $\int \psi^* \psi_k dx = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

### 3. Одномерное движение

Пусть потенциальная энергия частицы зависит только от одной координаты:  $V(x, y, z) = V(x)$ . Тогда волновую функцию  $\psi(x, y, z)$  можно искать в виде  $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y, z)$ , где  $\psi_2(y, z)$  удовлетворяет уравнению Шредингера для свободной двумерной частицы, а  $\psi_1(x)$  — одномерному уравнению Шредингера:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi_1 = 0.$$

Если потенциальная энергия частицы  $V(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$ , то волновую функцию можно искать в виде  $\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z)$ , где каждая из  $\psi_i$  удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера

$$\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V_i(x)]\psi_i = 0. \quad (2.4)$$

Покажем, что в одномерной задаче волновые функции физитных состояний имеют различные собственные значения (или, что то же самое, что «энергетические уровни дискретного спектра невырождены»).

Действительно, пусть есть два решения (2.4)  $\psi_1$  и  $\psi_2$  с одним значением  $E$ . Тогда

$$\frac{\psi''_1}{\psi_1} = -\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)] = \frac{\psi''_2}{\psi_2}.$$

Следовательно,  $\psi''_1\psi_2 - \psi_1\psi''_2 = 0$ . Интегрируя это уравнение, получаем  $\psi'_1\psi_2 - \psi_1\psi'_2 = c$ . Поскольку  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , то константа  $c = 0$ . Следовательно,  $\psi'_1\psi_2 - \psi_1\psi'_2 = 0$ , и, еще раз интегрируя, получаем  $\psi_1 = c\psi_2$ .

## Одномерное движение, поведение на бесконечности

Пусть  $V$  имеет следующую форму, см. рис. 2.4.

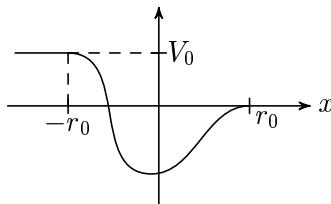


Рис. 2.4.

При таком потенциале волновые функции и их производные должны быть непрерывны. Кроме того, уравнение Шредингера

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0 \quad (2.5)$$

в области  $|x| > r_0$  сводится к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi = 0, & x < -r_0, \\ \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0, & x > r_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Как всегда, нас интересуют либо квадратично интегрируемые решения, которые являются собственными функциями оператора  $H$ , либо решения, ограниченные на всей числовой оси, описывающие непрерывный спектр  $H$ .

(1)  $E < 0$ . Обозначим  $a_1^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$ ,  $a_2^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E$ ,  $a_i > 0$ .

Тогда уравнения (2.6) имеют решения:

$$\begin{aligned} \text{при } x < -r_0 & \quad \psi = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{-a_1 x}, \\ \text{при } x > r_0 & \quad \psi = c'_1 e^{a_2 x} + c'_2 e^{-a_2 x}. \end{aligned}$$

Квадратичная интегрируемость  $\psi$  при  $x < -r_0$  означает, что  $c_2 = 0$ , т. е. при  $x < -r_0$   $\psi = e^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{V_0-E}x}$ . Это же решение при  $x > r_0$  является линейной комбинацией  $c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{-a_1 x}$  и может

быть квадратично интегрируемым только при  $c_1 = 0$ . Итак, мы стартуем с решения (2.5)  $\psi = e^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{V_0 - E} x}$  при  $x < -r_0$ ; это решение переписываем при  $x > r_0$  через фундаментальные решения  $c_1 e^{\sqrt{-E} x} + c_2 e^{-\sqrt{-E} x}$  и приравниваем нулю  $c_1$ . Уравнение  $c_1 = 0$  является, на самом деле, уравнением на  $E$ :  $c_1(E) = 0$ . Корни этого уравнения и задают дискретный спектр оператора  $H$ .

Проделаем предыдущую процедуру явно в случае потенциала, изображенного на рис. 2.5:

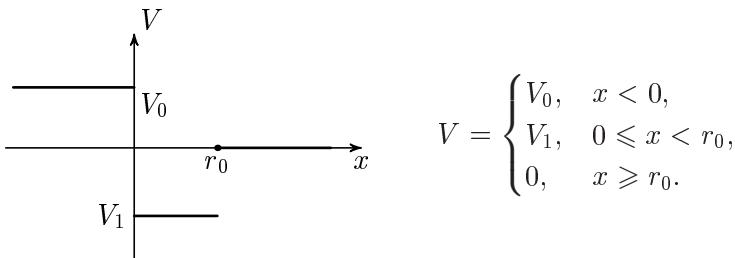


Рис. 2.5.

Найдем матрицу преобразования собственных функций (матрица монодромии) при переходе от  $V_0$  к  $V_1$ , от  $V_1$  к 0. Для этого обозначим  $\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{V_0 - E} = a$ ,  $\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{E - V_1} = b$ ,  $\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{-E} = c$ . Общие решения уравнения Шредингера записываются

$$\begin{cases} c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} & \text{при } x < 0, \\ c'_1 e^{ibx} + c'_2 e^{-ibx} & \text{при } 0 \leq x < r_0, \\ c''_1 e^{cx} + c''_2 e^{-cx} & \text{при } x > r_0. \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} c'_1 e^{ibx} + c'_2 e^{-ibx} & \text{при } 0 \leq x < r_0, \\ c''_1 e^{cx} + c''_2 e^{-cx} & \text{при } x > r_0. \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} c''_1 e^{cx} + c''_2 e^{-cx} & \text{при } x > r_0. \end{cases} \quad (36)$$

1) Рассмотрим  $\psi_1 = e^{ax}$ . При переходе к (2) нужно записать условие непрерывности решения и производной в точке  $x = 0$ . Получаем систему

$$\begin{cases} c'_{11} + c'_{21} = 1, \\ ibc'_{11} - ibc'_{21} = a, \end{cases}$$

из которой получаем первый столбец матрицы  $M_{V_0}^{V_1}$ :

$$M_{V_0}^{V_1} = \begin{pmatrix} \frac{a+ib}{2ib} & * \\ \frac{-a+ib}{2ib} & * \end{pmatrix}.$$

Второй столбец получается из первого формальной заменой  $a \mapsto -a$ . Или

$$M_{V_0}^{V_1} = \begin{pmatrix} \frac{a+ib}{2ib} & \frac{-a+ib}{2ib} \\ \frac{-a+ib}{2ib} & \frac{a+ib}{2ib} \end{pmatrix}.$$

2) Аналогично рассмотрению предыдущего пункта, записывая условие непрерывности решения и производной в точке  $x = r_0$ , получаем линейные системы на коэффициенты матрицы  $M_{V_0}^0$ .

$$\text{Ответ: } M_{V_0}^0 = \begin{pmatrix} e^{(-c+ib)r_0} \frac{c+ib}{2c} & e^{(-c-ib)r_0} \frac{c-ib}{2c} \\ e^{(c+ib)r_0} \frac{c-ib}{2c} & e^{(c-ib)r_0} \frac{c+ib}{2c} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что уравнение  $c_1(E) = 0$  на дискретный спектр  $E$  эквивалентно

$$e^{ibr_0}(c + ib)(a + ib) + e^{-ibr_0}(c - ib)(-a + ib) = 0 \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} e^{2ibr_0} &= \frac{(c - ib)}{(c + ib)} \frac{(a - ib)}{(a + ib)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} 2i\sqrt{E-V_1}r_0} = \frac{(\sqrt{-E} - i\sqrt{E-V_1})(\sqrt{V_0-E} - i\sqrt{E-V_1})}{(\sqrt{-E} + i\sqrt{E-V_1})(\sqrt{V_0-E} + i\sqrt{E-V_1})} \end{aligned} \quad (2.7)$$

## Потенциальная яма

Потенциальной ямой называется потенциал следующего вида:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x \geq r_0, \\ V_1, & \text{при } 0 \leq x < r_0. \end{cases}$$

(см. рис. 2.6). Это частный случай потенциала на рис. 2.5 при  $V_0 = 0$ .

Уравнение на дискретный спектр оператора  $H$  такого потенциала (2.7) упрощается. В результате получаем

$$e^{i\sqrt{E-V_1}r_0} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} = \frac{\sqrt{-E} - i\sqrt{E-V_1}}{\sqrt{-E} + i\sqrt{E-V_1}}. \quad (2.8)$$

В случае потенциала

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0 \text{ или } x > r_0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq r_0. \end{cases}$$

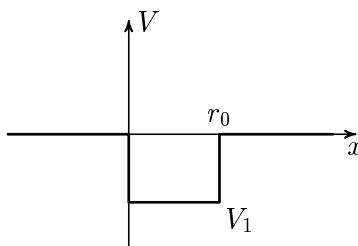


Рис. 2.6.

(потенциал с бесконечно высокими стенками) спектр полностью дискретный и имеет вид

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mr_0^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## Линейный осциллятор

**Определение.** Линейным или гармоническим осциллятором называют физическую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

## Спектр гармонического осциллятора

Заметим, что  $\frac{H}{\hbar\omega} = \frac{p^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega x^2}{2\hbar}$  является безразмерной величиной. Введем следующие операторы, которые обычно называются операторами рождения и уничтожения частицы:

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x, \\ a^+ &= \frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}} + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x. \end{aligned}$$

Если бы операторы  $p$  и  $x$  коммутировали, то  $a \cdot a^+$  было бы разложением  $\frac{H}{\hbar\omega}$  по формуле разности квадратов.

Легко проверить, что

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^+ + a^+a); \quad [a, a^+] = 1; \quad H = \hbar\omega \left( a^+a + \frac{1}{2} \right).$$

Определим еще один оператор  $\hat{n} = a^+a$ . Для него выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\hat{n}a^+ &= a^+(\hat{n} + 1), \\ \hat{n}a &= a(\hat{n} - 1).\end{aligned}$$

Рассмотрим собственную функцию (состояние)  $\psi_0$  оператора  $a$  такую, что  $a\psi_0 = 0$ . Тогда для  $\psi_n = (a^+)^n\psi_0$  выполнено  $\hat{n}\psi_n = n\psi_n$ .

Отсюда следует, что  $\psi_n$  — собственные функции гамильтониана  $H$ , т. е.  $H\psi_n = E_n\psi_n$  и  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ .

Окончательно получаем:

**Теорема.** Гармонический осциллятор обладает лишь дискретным спектром  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ , т. е. расстояния между двумя ближайшими уровнями одинаковы и равны  $\hbar\omega$ .

## Собственные функции гармонического осциллятора

Чтобы найти собственные функции гармонического осциллятора, нужно решить уравнение  $a\psi_0 = 0$ , которое эквивалентно в координатном представлении (вспоминаем, что  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ , а  $\hat{x}$  — это умножение на  $x$ )

$$\frac{d}{dx}\psi_0 = -x\frac{m\omega}{\hbar}\psi_0, \tag{2.9}$$

откуда  $\psi_0$  легко находится:

$$\psi_0 = c_0 e^{-\frac{x^2}{2b^2}}, \quad \text{где } b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Из определения  $\psi_n = (a^+)^n\psi_0$  получаем

$$\psi_n(x) = \left( \frac{-i}{\sqrt{2}} \right)^n \left( b \frac{d}{dx} - \frac{x}{b} \right)^n \psi_0(x).$$

Естественно сделать замену  $z = \frac{x}{b}$ . Тогда

$$\begin{aligned}\psi_n(bz) &= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{d}{dz} - z\right)^n \psi_0(bz), \quad \text{или} \\ \psi_n(bz) &= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{d}{dz} - z\right)^n e^{-\frac{z^2}{2}}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

**Определение.** Полиномы Эрмита  $H_n(x)$  определяются из следующих соотношений:

$$\frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n} = (-1)^n e^{-x^2/2} H_n(x).$$

При этом

- 1)  $\int H_n(x)H_m(x)e^{-x^2/2} dx = 0$  при  $n \neq m$ ;
- 2)  $\int H_n^2(x)e^{-x^2/2} dx = n! \sqrt{2\pi}$ ;
- 3)  $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{d}{dx}H_n(x)$ .

Система  $\{H_n(x)\}$  полна в пространстве  $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$  с  $\rho = e^{-x^2/2}$ .

## 4. Движение в трехмерном пространстве

### Момент импульса

Пространство изотропно. Это означает, что все направления в нем должны быть эквивалентны. Поэтому гамильтониан замкнутой системы не меняется при поворотах. То есть  $VH\psi = HV\psi$ , где  $V$  — оператор поворота. Если это свойство выполняется для бесконечно малого поворота, то оно будет выполняться и для любого поворота. Найдем вид генератора бесконечно малого поворота.

Пусть  $\delta\vec{\varphi}$  — вектор бесконечно малого поворота, направленный по оси поворота и равный по величине углу поворота. Тогда  $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}]$ . Это верно для радиус-вектора  $\vec{r}_a$  любой частицы  $a$ . Получаем

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \psi(r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2, \dots) - \psi(r_1, r_2, \dots) = \\ &= \sum_a \delta r_a \nabla_a \psi = \delta\vec{\varphi} \sum_a [\vec{r}_a, \vec{\nabla}_a] \psi.\end{aligned}$$

Оператор  $1 + \delta\varphi \sum [r_a, \nabla_a]$  и есть оператор бесконечно малого поворота.

Введем оператор  $\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a]$ , где  $p_a = \frac{\hbar}{i}\nabla_a$ . Из условия  $V^{-1}HV = H$  и  $V = 1 + i\delta\varphi \frac{\vec{M}}{\hbar}$  следует, что  $[H, \vec{M}] = 0$ .

Получаем, что полный момент импульса замкнутой системы сохраняется:  $\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$ .

Мы можем в дальнейшем рассматривать одну частицу. Так как операторы, относящиеся к разным частицам, коммутируют, то все коммутационные соотношения, верные для одной частицы, будут верны и для системы частиц.

Введем операторы проекций момента импульса  $L_i = -i[r, \nabla]_i$  ( $L_i = \frac{1}{\hbar}M_i$ ) и оператор квадрата момента импульса  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ .

В координатном представлении имеем

$$\begin{aligned} L_1 &= i \left( x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \\ L_2 &= i \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \\ L_3 &= i \left( x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Операторы  $L_i$  и  $L^2$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

1.  $[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k;$
2.  $[L^2, L_i] = 0.$

Из (2.12) следует, что проекции момента импульса не являются одновременно измеряемыми величинами. Одновременно могут быть измерены только квадрат момента импульса и одна из его проекций. Обычное соглашение состоит в том, что измеряемая проекция момента импульса — это  $L_3 = L^z$ . Удобно ввести следующие операторы:  $L_+ = L_1 + iL_2$ ,  $L_- = L_1 - iL_2$ .

Легко проверить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1. \quad [L_+, L_-] &= 2L_3; \\ [L_3, L_+] &= L_+; \\ [L_3, L_-] &= -L_-. \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$2. \quad L^2 = L_+L_- + L_3^2 - L_3 = L_-L_+ + L_3^2 + L_3.$$

Полезно также получить выражения для этих операторов в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Результат имеет вид

$$\begin{aligned} 1. \quad L_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}; \\ 2. \quad L_+ &= e^{i\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]; \\ L_- &= e^{-i\varphi} \left[ -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]; \\ 3. \quad L^2 &= - \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]; \\ 4. \quad \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Отсюда следует, что оператор  $L^2$  равен, с точностью до множителя, угловой части оператора Лапласа.

## Спектр операторов $\mathbb{L}^2$ и $L_3$

Найдем собственные значения операторов  $\mathbb{L}^2$  и  $L_3$ . Рассмотрим подпространство, соответствующее одному фиксированному собственному значению оператора  $\mathbb{L}^2$ . Обозначим его  $A$ , т. е.  $\mathbb{L}^2\psi = A\psi$ . Пусть  $\psi_M$  — собственный вектор  $L_3$  из этого подпространства с собственным значением  $M$ , т. е.  $L_3\psi_M = M\psi_M$ . Из координатного

представления  $\left( L_3 = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$  получаем, что  $\psi_M = f(r, \theta) e^{iM\varphi}$ , а из однозначности  $\psi_M$  следует, что  $M = 0, \pm 1, \dots$  целое.

$$((\mathbb{L}^2 - L_3^2) \psi_M, \psi_M) = (A\psi_M - M^2\psi_M, \psi_M) = A - M^2,$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} ((\mathbb{L}^2 - L_3^2) \psi_M, \psi_M) &= (L_1^2 \psi_M, \psi_M) + (L_2^2 \psi_M, \psi_M) = \\ &= (L_1 \psi_M, L_1 \psi_M) + (L_2 \psi_M, L_2 \psi_M) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Поэтому  $|M| \leq \sqrt{A}$ . Получаем, что собственные значения оператора  $L_3$  на нашем пространстве ограничены сверху и снизу.

Обозначим  $M_{\max} = L$ . Из задачи предыдущего параграфа следует, что

- (а)  $L_3(L_+ \psi_M) = (L_+ L_3 + L_+) \psi_M = (M + 1)L_+ \psi_M$ , т. е.  $L_+ \psi_M = \psi_{M+1}$  и, также,  $L_- \psi_M = \psi_{M-1}$ ;
- (б)  $L_+ \psi_L = 0$  и  $\mathbb{L}^2 \psi_L = (L_- L_+ + L_3^2 + L_3) \psi_L = L(L + 1)\psi_L$ , т. е.  $A = L(L + 1)$ ;
- (в)  $L_- \psi_{-L} = 0$ .

Получаем, что собственное подпространство с фиксированным собственным значением  $L(L + 1)$  оператора  $\mathbb{L}^2$  имеет размерность  $2L + 1$  и набор собственных значений оператора  $L_3$  на нём  $\mathcal{L} = \{-L, \dots, L - 1, L\}$ .

Говорят, что уровень энергии, соответствующий моменту  $L$ ,  $(2L + 1)$ -кратно вырожден. Об это вырождении обычно говорят как о «вырождении по направлениям момента», и считают его не случайным.

Если же собственному значению оператора (например,  $\mathbb{L}^2$  или  $H$ ) соответствует не одно подпространство, т. е. инвариантное подпространство данного уровня раскладывается в сумму нескольких не-приводимых, то физики называют такое вырождение случайным.

Теперь можно найти матричные элементы операторов  $L_3$ ,  $L_+$  и  $L_-$  в этом подпространстве (представлении) в базисе собственных век-

торов  $\psi_M = |M\rangle$  оператора  $L_3$ .

$$(L_3)_{MM'} = M\delta_{MM'}, \quad \text{где } M \in \mathcal{L}.$$

$$\begin{aligned} L(L+1) &= \langle M|L_+|M-1\rangle\langle M-1|L_-|M\rangle + M^2 - M = \\ &= (\langle M|L_+|M-1\rangle)^2 + M^2 - M. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle M|L_+|M-1\rangle = \langle M-1|L_-|M\rangle = \sqrt{(L+M)(L-M+1)}.$$

## Собственные функции оператора момента

В этом параграфе все большие буквы становятся маленькими:  $L = l$ ,  $M = m$ .

Пусть  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  — собственные функции операторов  $\mathbb{L}^2$  и  $L_3$ , которые при фиксированном  $l$  образуют  $(2l+1)$ -мерное представление алгебры  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$\begin{cases} \mathbb{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ L_3 Y_{lm}(\theta, \varphi) = mY_{lm}(\theta, \varphi). \end{cases}$$

Из формул предыдущих параграфов следует, что

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \theta_{lm}(\theta), \\ Y_{ll}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi} \theta_{ll}(\theta), \\ \frac{d\theta_{ll}(\theta)}{d\theta} - l \operatorname{ctg} \theta \theta_{ll}(\theta) &= 0 \quad (L_+ Y_{ll} = 0). \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$\theta_{ll}(\theta) = N_l \sin^l \theta.$$

Осталось только воспользоваться равенством  $L_- \psi_M = \psi_{M-1}$ :

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2l)!}} (L_-)^{l-m} Y_{ll}(\theta, \varphi).$$

## Движение в центрально-симметричном поле

Оператор Шредингера для свободной частицы в трехмерном пространстве в координатном представлении имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta.$$

Уравнение на собственные функции

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi, \quad E = k^2 > 0$$

имеет решения

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{i\frac{\sqrt{2m}k}{\hbar}(\vec{x}, \vec{k})},$$

где  $\vec{k} \in S^2$  — вектор на единичной сфере.

Спектр оператора  $H$  является положительным, непрерывным и бесконечно-кратным. Каждому направлению  $\vec{k}$  соответствует собственная функция  $\psi_{\vec{k}}(x)$ . Собственные функции «нумеруются» точками единичной сферы.

Оператор Шредингера для частицы в потенциальном поле в координатном представлении имеет вид  $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$ .

Как и в классической механике, в квантовой механике к задаче о движении частицы в потенциальном поле сводится задача о движении двух тел.

Рассмотрим систему двух частиц  $m_1$  и  $m_2$  с потенциалом взаимодействия  $V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ . Оператор Шредингера для такой системы в координатном представлении имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2).$$

Как и в классической задаче, введем переменные:

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad x = x_1 - x_2, \quad M = m_1 + m_2,$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \text{ — приведенная масса.}$$

В новых переменных

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_X - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_x + V(x).$$

В уравнении на собственные значения

$$H\Psi(X, x) = E\Psi(X, x)$$

переменные разделяются, и решение можно искать в виде

$$\Psi(X, x) = \psi(X)\psi_1(x).$$

Функции  $\psi(X)$  и  $\psi_1(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi(X) &= \varepsilon\psi(X), \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi_1(x) + V(x)\psi_1(x) &= \varepsilon_1\psi_1(x). \end{aligned}$$

где  $E = \varepsilon + \varepsilon_1$ . Первое из этих уравнений есть уравнение на собственные значения оператора Шредингера свободной частицы, а второе совпадает с уравнением Шредингера для частицы массы  $\mu$  в потенциале  $V(x)$ .

Как и в классическом случае, наиболее важным является случай центрально-симметричного поля, в котором  $V(x) = V(|x|) = V(r)$ .

Уравнение Шредингера для движения частицы в центрально-симметричном поле имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0. \quad (2.15)$$

Будем искать стационарные состояния в виде

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

т. е. рассматривать волновые функции с фиксированным значением момента  $l$  и его проекции  $m$ :

$$H\Psi = E\Psi, \quad L^2\Psi = l(l+1)\Psi, \quad L_3\Psi = m\Psi.$$

Вспомнив (7.4.4), получаем

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] R(r) = 0. \quad (2.16)$$

Заметим, что уравнение (2.16) не содержит значения проекции момента  $m$ , что соответствует  $(2l+1)$ -кратному вырождению по направлению момента.

## Движение в кулоновом поле

*Кулоновым*, как и в классике, называется потенциал вида  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ .

Уравнение (2.16) примет вид

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E + \frac{\alpha}{r} \right] R = 0. \quad (2.17)$$

При замене  $r = \frac{\hbar^2}{m\alpha} r_1$ ,  $E = \frac{m\alpha^2}{\hbar^2} E_1$  уравнение (2.17) преобразуется в

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{l(l+1)}{r^2} R + 2 \left( E + \frac{1}{r} \right) R = 0. \quad (2.18)$$

Рассмотрим поведение решения  $R(r)$  в двух случаях.

(1)  $r \rightarrow 0$ ,  $R(r) \rightarrow r^\alpha$ .

При  $r \rightarrow 0$  главными являются первые три члена уравнения (2.18). Приравнивая нулю коэффициенты в (2.18) при  $r^{\alpha-2}$ , получаем

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1) = 0 \quad (2.19)$$

или  $\alpha(\alpha+1) = l(l+1)$ . Следовательно,  $\alpha = l$  или  $\alpha = -(l+1)$ . Отсутствие расходимости при  $x = 0$  диктует выбор

$$\alpha = l.$$

(2)  $r \rightarrow \infty$ .

При  $r \rightarrow \infty$  главными являются члены

$$R'' + 2ER = 0, \quad \text{т. е.} \quad R(r) = e^{\pm\sqrt{-2E}r} f(r).$$

При отрицательных значениях спектра  $E < 0$  отсутствие расходимости при  $r \rightarrow \infty$  диктует выбор знака

$$R(r) = e^{-\sqrt{-2E}r} f(r).$$

Обозначим  $n = \frac{1}{\sqrt{-2E}}$  (пока это только обозначение, но скоро будет показано, что  $n$  — целое).

Будем искать решение

$$R_{nl}(r) = r^l e^{-\sqrt{-2E}r} W(r). \quad (2.20)$$

Подставляя (2.20) в (2.18), получаем уравнение на  $W(r)$ :

$$\begin{aligned} W'' + \left[ (2l+1) \frac{1}{r} + 2 \left( -\sqrt{-2E} \right) \right] W' + \\ + \left[ (2l+1) \left( -\sqrt{-2E} \right) \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \right] W = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) является вырожденным гипергеометрическим уравнением, про которое известно, что решение (2.21), имеющее постоянный предел при  $r \rightarrow 0$  и растущее не быстрее степени на  $\infty$ , существует при  $-(-2E)^{-1/2} = n$  целом. Получаем, что  $E = -\frac{1}{2n^2}$ , где  $n$  — целое. Вспомнив замену, сделанную в уравнении (2.17), получаем дискретный спектр кулонового потенциала:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}. \quad (2.22)$$

## Скрытая симметрия в кулоновой задаче

Положим  $m = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\hbar = 1$ . Заметим, что получив ответ в безразмерном виде, правильный ответ можно восстановить из соображений размерности, замечая, что

$$[L] = \frac{\hbar^2}{m\alpha}, \quad [T] = \frac{\hbar^3}{m\alpha^2}, \quad [M] = m, \quad [E] = \frac{m\alpha^2}{\hbar^2}.$$

Гамильтониан кулоновой задачи равен  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} - \frac{1}{r}$ , где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

В классическом случае в кулоновой задаче существует первый интеграл вида

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} - [\vec{p}, \vec{L}].$$

Рассмотрим аналогичный оператор в квантовой задаче:

$$\vec{\hat{A}} = \frac{\hat{r}}{r} - [\hat{\vec{p}}, \vec{\hat{L}}],$$

где последняя скобка понимается сначала как векторное произведение векторов, а потом — превращение их в операторы, т. е.

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \frac{x_1}{r} - p_2 L_3 + p_3 L_2, \\ \hat{A}_2 &= \frac{x_2}{r} - p_3 L_1 + p_1 L_3, \\ \hat{A}_3 &= \frac{x_3}{r} - p_1 L_2 + p_2 L_1.\end{aligned}$$

Выполняются следующие соотношения для операторов  $A_i$ :

$$\begin{aligned}[L_i, A_k] &= i\varepsilon_{ijk} A_k, \\ [A_i, A_k] &= -2i\varepsilon_{ijk} H L_k.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Из соотношений (2.23) или прямым вычислением легко получить, что

$$[H, A_k] = 0.\tag{2.24}$$

Последнее соотношение показывает, что и в квантовой кулоновской задаче  $\vec{\hat{A}}$  является первым интегралом.

Фиксируем уровень энергии  $E < 0$ , т. е. рассмотрим подпространство  $H\psi = E\psi$ . На этом подпространстве последнее соотношение (2.23) примет вид

$$[A_i, A_k] = -2Ei\varepsilon_{ijk} L_k.\tag{2.25}$$

Введем новые операторы  $\vec{N} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{-2E}}$ . С учетом этой нормировки коммутационные соотношения для  $L_k$  и  $N_k$  выглядят как соотношения для образующих алгебры  $\mathfrak{so}(4)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} [L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \\ [L_i, N_k] = i\varepsilon_{ijk} N_k, \\ [N_i, N_k] = i\varepsilon_{ijk} L_k. \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Мы получили, что пространство состояний с заданной энергией — это пространство представления группы  $O(4)$ .

На этом подпространстве выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\vec{L}\vec{N} &= 0, \\ L^2 + N^2 &= -1 - \frac{1}{2E}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Алгебра  $\mathfrak{o}(4)$  изоморфна  $\mathfrak{o}(3) \times \mathfrak{o}(3)$ . Действительно, введем операторы

$$\vec{J}_1 = \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{N}), \quad \vec{J}_2 = \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{N}).$$

Легко проверить, что компоненты каждого из операторов  $\vec{J}_i$  коммутируют, как образующие  $\mathfrak{so}(3)$ , т. е.

$$\begin{aligned}[J_{1i}, J_{1j}] &= i\varepsilon_{ijk}J_{1k}, \\ [J_{2i}, J_{2j}] &= i\varepsilon_{ijk}J_{2k}, \\ [J_{1i}, J_{2j}] &= 0.\end{aligned}$$

Для новых операторов  $\vec{J}_i$  соотношения (2.27) примут вид

$$\vec{J}_1^2 = \vec{J}_2^2 = -\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2E} \right) = j(j+1).$$

Последнее равенство пока что является только обозначением. Можно показать, повторяя почти дословно рассуждения из предыдущей лекции, что  $j$  — целое или полуцелое.

Из соотношений (2.27) следует, что  $j_1 = j_2 = j$  и, кроме того,  $E_n = -\frac{1}{2(2j+1)^2} = -\frac{1}{2n^2}$ . Переходя к размерным величинам, имеем  $E_n = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}$ .

Уровни с данной энергией  $E_n$  не зависят от  $l$  и  $m$  и, следовательно,  $(2j+1)(2j+1) = n^2$ -кратно вырождены. Это случайное вырождение объясняется  $O(4)$ -симметрией.

## Движение в кулоновом поле. Продолжение

Вернемся к уравнению

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{l(l+1)}{r^2}R + 2(E + 1/r)R = 0.$$

Решим его другим методом. Чтобы избавиться от первой производной, сделаем замену  $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$  с условием, что  $\int |\chi(r)|^2 dr$  должен сходиться при  $r = 0$ . Получаем

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} \right] \chi = -2E\chi.$$

При  $r \rightarrow \infty$  решение должно иметь асимптотику  $\chi \rightarrow e^{-\sqrt{-2E}r}$ . Сделаем еще замену  $\chi(r) = f(r)e^{-r/a}$ , где  $a = \frac{1}{\sqrt{-2E}}$ . Получаем

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{a} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{-2}{r} \right] f = 0.$$

Будем искать решение в виде ряда  $f(r) = \sum c_s r^s$ . Тогда

$$\sum_s \left\{ s(s-1)z^{s-2} - \frac{2s}{a}r^{s-1} - l(l+1)r^{s-2} + 2r^{s-1} \right\} = 0,$$

и мы получаем рекуррентное соотношение

$$c_s [s(s-1) - l(l+1)] = c_{s-1} \left[ 2 \frac{s-1}{a} - 2 \right]. \quad (8.15)$$

Из условия на  $\int |\chi(r)|^2 dr$  следует, что  $s = l + 1$ .

Рассмотрим теперь асимптотику ряда при больших  $s$ . Тогда  $\frac{c_s}{c_{s-1}} \sim \sim \frac{2}{sa}$ . Поэтому, если ряд не обрывается при больших  $s$ , то он сходится к  $\sum \frac{1}{s!} \left( \frac{2r}{a} \right)^s = e^{2r/a}$ , и при больших  $r$  получаем  $\chi(r) \rightarrow e^{r/a}$ , что физически неприемлемо.

Ряд оборвется, если для некоторого  $s = n + 1$ , ( $n > l$ ) будет выполнено соотношение  $\left[ 2 \frac{n}{a} - 2 \right] = 0$ . Тогда  $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = 0$ .

Отсюда  $E = -\frac{1}{2n^2}$ .

Или, в размерных величинах,  $E_n = -\frac{\mu\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}$ .

**Замечание.** Формула (2.23) для энергетических уровней в кулоновской задаче позволяет вычислить частоты спектральных линий, например, для атома водорода ( $\alpha = e^2$ ). Из (2.23) и формулы Бора

$$\hbar\omega_{mn} = E_n - E_m, \quad E_n > E_m$$

получается формула

$$\omega_{mn} = \frac{\mu e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad n < m. \quad (2.28)$$

Вычисленные по формуле (2.28) спектральные линии атома водорода с удивительной точностью совпадают со спектральными линиями (серия Лаймана, Бальмера, Пашена и т. д.) реального атома водорода, наблюдаемыми в эксперименте (см. введение ко второй части).

Итак, мы получили, что уровню  $E_n = -\frac{\mu\alpha^2}{2n^2\hbar^2}$  соответствуют волновые функции

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = r^l e^{-\sqrt{\frac{\mu\alpha^2}{\hbar^2 n^2}} r} P_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где  $P_{nl}(r) = f(r)$  — многочлен, коэффициенты которого вычисляются по формуле (8.15), степени  $n - l - 1$ .

Проверим еще раз, что степень вырождения равна  $n^2$ . Для этого нужно подсчитать число функций  $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$  для данного  $n$ . Оно равно  $\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$ .

## Спин электрона

Рассмотрим систему частиц как единое целое, находящееся в определенном состоянии. Она обладает определенной внутренней энергией (собственное значение оператора  $H$ ) и определенным моментом (собственное значение оператора  $L^2$ ). Естественно и каждой элементарной частице приписать некоторый «собственный» момент.

Стоит еще раз упомянуть опыты Штерна и Герлаха, показавшие, что при включении магнитного поля пучок атомов водорода раздваивается. Это означает, что проекция на направление магнитного поля момента атома водорода в основном состоянии принимает два значения. Абсолютно так же ведет себя и пучок электронов. Поэтому естественно считать, что электрон имеет собственный момент импульса, проекция которого на некоторое направление принимает два значения.

Собственный момент электрона называется *спином*, а момент импульса, связанный с движением электрона в пространстве, называется *орбитальным моментом*.

Полный момент системы частиц является суммой их орбитальных моментов и спинов.

Итак спин — это новая наблюдаемая, принимающая два значения. Следовательно, число состояний электрона должно удвоиться. Мы должны считать, например, что электрон может находиться в двух различных внутренних состояниях, не зависящих от его «внешнего» состояния. Посмотрим, как математически описать эту ситуацию для электрона.

Пусть  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  — пространство состояний электрона и  $\Psi(x, y, z) \in \mathcal{H}$ . Рассмотрим пространство  $H = \mathbb{C}^2$  с базисом  $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . В этом пространстве и будет действовать наблюдаемая спин. Теперь пространством состояний с учетом спина будет

$$\mathcal{H}_S = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes H.$$

Самосопряженный оператор  $S$ , действующий в  $H$ , можно представить в виде

$$S = \alpha_0 I + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3, \quad \text{где}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицы Паули.

$$\text{Обозначим } s_j = \frac{\hbar}{2} \sigma_j, j = 1, 2, 3.$$

Легко проверить, что  $s_j$  удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.11)

$$[s_i, s_j] = i \varepsilon_{ijk} s_k \hbar.$$

Таким образом, операторы  $s_j$  удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и компоненты углового момента. Поэтому естественно считать, что  $s_j$  соответствуют вкладу собственного углового момента. Квадрат оператора  $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 = s(s+1)\hbar^2$ ,

где  $s = \frac{1}{2}$ . Именно в этом смысле говорят, что спин электрона равен  $\frac{1}{2}$ .

Пространство состояний  $\mathcal{H}_S$  естественно представлять как пары функций

$$\Psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y, z) \\ \psi_2(x, y, z) \end{pmatrix},$$

отождествив  $\psi(x, y, z) \otimes h_1$  с  $\begin{pmatrix} \psi(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix}$ , а  $\psi(x, y, z) \otimes h_2$  с  $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi(x, y, z) \end{pmatrix}$ .

Вектор-функция  $\Psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  называется спинором. Физики  $\Psi(x, y, z)$  записывают как  $\Psi(x, y, z, \sigma)$ , понимая  $\sigma = \frac{1}{2}$  (или «+») как компоненту  $\mathcal{H} \otimes h_1$ ,  $\sigma = -\frac{1}{2}$  (или «-») как компоненту  $\mathcal{H} \otimes h_2$ .

Если сферически-симметричному гамильтониану  $H$  соответствует представление  $\rho_1$  в пространстве  $\mathcal{H}$  и  $\rho_2$  в пространстве  $H$ , то

$$\rho_s(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$

представление  $\mathrm{SO}(3)$  в пространстве  $\mathcal{H}_S = \mathcal{H} \otimes H$ .

Пусть  $\rho_1(g) = e^{-i(L_j a_j)}$ ,  $\rho_2(g) = e^{-is_j a_j}$ , где  $a_j$  — параметры. Легко проверить, что

$$\left. \frac{\partial \rho_s(g)}{\partial a_j} \right|_{a=0} = -i(L_j \otimes I + I \otimes s_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно, для системы со сферически-симметричным оператором Шредингера справедлив закон сохранения полного момента импульса  $J_j = L_j + s_j$ .

## 5. Теория возмущений

Точному решению уравнения Шредингера

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{2.29}$$

поддаются немногие системы. Однако если  $H = H_0 + V$ ,  $H_0$  — точно решаемая задача, а  $V \ll H_0$  — малое возмущение, то задачу с гамильтонианом  $H$  можно решить приближенно. Такая теория называется «теорией возмущений». В теории возмущений есть два метода.

В одном возмущение рассматривается как причина изменения состояний. Этот метод полезен для стационарного случая.

В другом состояния не меняются, а система совершает переходы между состояниями.

## Стационарный, невырожденный случай

Пусть  $H_0$  и  $V$  не зависят от времени. Пусть нам известно решение невозмущенной задачи

$$H_0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0, \quad (2.30)$$

спектр которой мы будем считать невырожденным и дискретным. Будем искать  $\psi_n$  в виде

$$\psi_n = \sum_m c_m(n) \psi_m^0. \quad (2.31)$$

Подставив (2.31) в (2.29), получим

$$(H_0 + V) \left( \sum_m c_m(n) \psi_m^0 \right) = E_n \left( \sum_m c_m(n) \psi_m^0 \right),$$

$$\sum_m c_m(n) (E_m^0 \psi_m^0 + V \psi_m^0) = \sum_m c_m(n) E_n \psi_m^0.$$

Умножив скалярно на вектор  $\psi_k^0$  последнее равенство, получим

$$(E_n - E_k^0) c_k(n) = \sum_m c_m(n) V_{km}, \quad (2.32)$$

где  $V_{km} = \langle \psi_k^0 | V | \psi_m^0 \rangle = \int \overline{\psi}_k^0 V \psi_m^0 dV$ .

Разложим теперь  $E_n$  и  $c_m(n)$  по параметру малости, т. е. будем искать  $E_n$  и  $c_m(n)$  в виде

$$E_n = E_n^0 + E_n^1 + E_n^2 + \dots,$$

$$c_m(n) = \delta_m^n + c_m^1(n) + c_m^2(n) + \dots, \quad (2.33)$$

где  $E_n^1$  и  $c_m^1$  порядка малости  $V$ ,  $E_n^2$  и  $c_m^2$  второго порядка малости по  $V$  и т. д.

Подставим (2.33) в (2.32) и приравняем члены с одинаковыми порядками малости по  $V$ .

Получаем

$$\begin{aligned} ((E_n^0 - E_k^0) + E_n^1 + E_n^2 + \dots) (\delta_k^n + c_k^1(n) + c_k^2(n) + \dots) &= \\ &= \sum_m (\delta_m^n + c_m^1(n) + c_m^2(n) + \dots) V_{km}. \end{aligned}$$

Сравнивая нулевой порядок малости, получаем

$$(E_n^0 - E_k^0) \delta_k^n = 0.$$

Из первого порядка малости следует, что

$$E_n^1 \delta_k^n + c_k^1(n) (E_n^0 - E_k^0) = \sum_m \delta_m^n V_{km}.$$

- 1)  $n = k$ , следовательно,  $E_n^1 = V_{nn}$ ;
- 2)  $n \neq k$ , следовательно,  $c_k^1 = \frac{V_{kn}}{E_n^0 - E_k^0}$ .

Величина  $c_n^1(n)$  не находится из этих уравнений. Из условия нормировки (это «заклинание» означает, что мы хотим, чтобы  $|\psi_n^0 + \psi_n^1|^2$ , где

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{E_n^0 - E_m^0} \psi_m^0, \quad (2.34)$$

отличалась от 1 на второй порядок малости) следует, что  $c_n^1(n) = 0$ .

Из поправки первого приближения к волновым функциям (2.34) следует, что метод применим, если

$$|V_{mn}| \ll |E_n^0 - E_m^0|.$$

Сравнивая теперь второй порядок малости, получаем

$$E_n^2 \delta_k^n + E_n^1 c_k^1(n) + (E_n^0 - E_k^0) c_k^2(n) = \sum_m c_m^1(n) V_{km}.$$

- 1)  $n = k$ ,  $E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^0 - E_m^0}$ ;
- 2)  $n \neq k$ ,

$$c_k^2(n) = \frac{1}{(E_n^0 - E_k^0)} \left( \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{km}}{E_n^0 - E_m^0} - \frac{V_{kn} V_{nn}}{E_n^0 - E_k^0} \right).$$

И так далее.

## Вырожденный случай

Пусть  $\psi_{n,\alpha}^0$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  — линейно независимые решения уравнения  $H_0\psi_{n,\alpha}^0 = E_n^0\psi_{n,\alpha}^0$ , соответствующие  $N$ -кратному вырожденному собственному значению  $E_n^0$ . Будем называть векторы в этом подпространстве *правильными*, если они мало меняются под действием возмущения.

Будем искать функции нулевого приближения как линейные комбинации функций  $\psi_{n,\alpha}^0$ . Тогда на коэффициенты  $c^{(1)} = (c_\alpha^1)$  этой линейной комбинации получаем линейное однородное уравнение

$$(V - E^{(1)}I)c^{(1)} = 0, \quad \text{где} \quad V = (V_{\alpha,\beta}),$$

$$V_{\alpha,\beta} = \int \widehat{\psi}_{n,\alpha}^0 V \psi_{n,\beta}^0, \quad I \text{ — единичная } N \times N \text{ матрица.}$$

Это уравнение имеет ненулевое решение при условии  $\det(V - E^{(1)}I) = 0$ , что определяет первые поправки к энергии.

Получаем следующий результат.

*Правильные волновые функции нулевого приближения — это собственные векторы оператора возмущения, спроектированные на подпространство данного вырожденного уровня. Поправка к уровню энергии, соответствующая данной правильной волновой функции, равна среднему от возмущения в этом состоянии.*

## Применение. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана

Рассмотрим атом (например, водорода) в постоянном малом магнитном поле. Пренебрежем полным спином атома и вместо суммы будем рассматривать один электрон. Напомним, что в классической теории

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi,$$

при условии  $\operatorname{div} A = 0$ . Чтобы получить  $\hat{H}$ , нужно из уравнения  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  выразить  $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$  и подставить в  $H = H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$ .

Проделаем все это с нашим лагранжианом

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad \vec{v} = \frac{1}{m}\vec{p} - \frac{e}{mc}\vec{A}.$$

Замечая, что нет проблемы с расстановкой порядка операторов  $\widehat{p}$  и  $\widehat{A}$ , так как  $[\widehat{p}, \widehat{A}] = -i\hbar \operatorname{div} A = 0$ , получаем

$$\begin{aligned}\widehat{H} = pv - L &= \left( \widehat{mv + \frac{e}{c}v}, v \right) - L = \frac{1}{2m} \left( \widehat{p} - \frac{e}{c} \widehat{A} \right)^2 + e\widehat{\varphi} = \\ &= \widehat{H}_0 + \frac{|e|}{mc} \widehat{A} \widehat{p} + \frac{e^2}{2mc^2} (\widehat{A})^2,\end{aligned}$$

где  $H_0 = \frac{p^2}{2m} + e\varphi$ .

Условия  $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ ,  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  выполняются для постоянного магнитного поля  $\vec{H}$ , если  $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H}, \vec{r}]$ . Подставляя это выражение в гамильтониан и пренебрегая последним членом из-за его второго порядка малости по  $H$ , получаем

$$\widehat{H} \approx \widehat{H}_0 + \frac{|e|}{2mc} [\vec{H}, \vec{r}] \widehat{p} = \widehat{H}_0 + \frac{|e|}{2mc} \vec{H} [\vec{r}, \widehat{p}] = \widehat{H}_0 + \frac{|e|}{2mc} \vec{H} \widehat{L},$$

где  $\widehat{L} = [\widehat{r}, \widehat{p}]$ .

Считая, что магнитное поле направлено по оси  $z$ , получаем, что по теории возмущений поправка  $\Delta E = \mu_B H \overline{L}_z$ , где  $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc}$ , а  $\overline{L}_z$  равно среднему значению невозбужденного состояния  $z$ -й составляющей момента. Т. е. магнитное поле снимает вырождение углового момента вдоль своего направления. Это называют *эффектом Зеемана*.

Посмотрим на это явление с точки зрения теории представлений групп. У сферически-симметричного гамильтониана (кулоновская задача, электрон атома водорода) все пространство состояний раскладывается в прямую сумму пространств неприводимых представлений группы  $\mathrm{SO}(3)$ . После включения магнитного поля по оси  $x_3$  ( $z$ ) каждое неприводимое представление  $\mathrm{SO}(3)$  ограничивается на подгруппу  $S^1 \subset \mathrm{SO}(3)$ , состоящую из вращений вокруг этой оси.  $S^1$  — абелева группа и все ее неприводимые представления одномерны, а состояния, соответствующие разным инвариантным относительно  $S^1$  подпространствам, имеют, вообще говоря, разные энергетические уровни. Это расщепление спектральных линий при включении магнитного поля наблюдается в эксперименте.

## Возмущения, зависящие от времени

Пусть теперь возмущение зависит от времени:  $V = V(t)$ . Воспользуемся вторым методом теории возмущений. Будем считать, что нам известны волновые функции  $\psi_k^0$  невозмущенной задачи, т. е. решения нестационарного уравнения Шредингера для невозмущенного гамильтониана  $H_0$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_k^0}{\partial t} = H_0 \psi_k^0, \quad (2.35)$$

а произвольное решение (2.35) может быть записано в виде  $\psi = \sum a_k \psi_k^0$ . Будем искать решение уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + V)\psi \quad (2.36)$$

в виде

$$\psi = \sum_k a_k(t) \psi_k^0. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.36) и учитывая (2.35), получаем

$$i\hbar \sum_k \psi_k^0 \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} = \sum_k a_k V \psi_k^0. \quad (2.38)$$

Умножив (2.38) скалярно на  $\psi_m^0$ , получим

$$i\hbar \frac{\partial a_m(t)}{\partial t} = \sum_k a_k(t) V_{mk}(t), \quad (2.39)$$

где  $V_{mk}(t) = \langle \psi_m^0(t) | V | \psi_k^0(t) \rangle = \int \overline{\psi}_m^0(t) V \psi_k^0(t) dV = V_{mk} e^{i\omega_{mk} t}$ ,  $\omega_{mk} = \frac{E_m^0 - E_k^0}{\hbar}$ ;  $V_{mk}$ , вообще говоря, тоже зависят от времени:

$$V_{mk} = \langle \psi_m^0 | V | \psi_k^0 \rangle = \int \overline{\psi}_m^0 V(t) \psi_k^0 dV.$$

Пусть  $V \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Рассмотрим возмущение  $n$ -го стационарного состояния  $\psi_n^0$  при изменении времени  $t$  от  $-\infty$  к  $+\infty$ . Ищем  $\psi_n(t)$  в виде

$$\psi_n(t) = \sum_k a_{nk}(t) \psi_k^0 e^{-\frac{E_n}{\hbar} t},$$

$$a_{nk}(t) = a_{nk}^0 + a_{nk}^1(t),$$

где  $a_{nk}^0 = \delta_n^k$  имеет нулевой порядок малости, а  $a_{nk}^1(t)$  имеет первый порядок малости по  $V$ .

В первом приближении получаем

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da_{nk}^1(t)}{dt} &= V_{nk}(t), \\ a_{nk}^1(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{nk} e^{i\omega_{nk} t} dt. \end{aligned}$$

Следовательно,  $a_{nk}(t) = a_{nk}^1(t)$  при  $n \neq k$ , а  $a_{nn}(t) = 1 + a_{nn}^1(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{nn} dt$ .

Вероятность перехода из состояния  $n$  в состояние  $k$  при  $t \rightarrow +\infty$  равна

$$W_{nk} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{nk} e^{i\omega_{nk} t} dt \right|^2. \quad (2.40)$$

### Периодическое возмущение. Атом в поле электромагнитной волны

Пусть  $\widehat{V} = e\widehat{E}(\omega)e^{i\omega t}$ . Из формулы (2.40) получаем, что

$$W_{nk} = \frac{e^2}{\hbar^2} \left| \int \overline{\psi}_n E(\omega) \psi_k dV \right|^2 \left| \int e^{i\omega t} e^{i\omega_{nk} t} dt \right|^2. \quad (2.41)$$

Последний сомножитель в (2.41) не обращается в нуль, если  $\omega = -\omega_{nk}$ . Получаем, что ненулевая вероятность перехода  $W_{nk}$  существует между состояниями при условии  $\omega = -\frac{E_n - E_k}{\hbar}$  или  $E_k - E_n = \hbar\omega$ . Этот результат соответствует правилу Бора о поглощении атомом кванта света.

## 6. Квазиклассическое приближение

Пусть  $\lambda = \frac{\hbar}{p} \ll L$ , где  $L$  — некая длина, свойственная данной задаче. Такие системы называются *квазиклассическими*.

В уравнении Шредингера

$$\frac{\hbar}{2m} \Delta \psi + (E - U) \psi = 0 \quad (2.42)$$

сделаем подстановку  $\psi = e^{i\frac{\sigma}{\hbar}}$ . Получаем

$$\frac{1}{2m} (\nabla \sigma)^2 - \frac{i\hbar}{2m} \Delta \sigma = E - U. \quad (2.43)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  можно искать решение в виде ряда

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\hbar}{i} \sigma_1 + \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \sigma_2 + \dots \quad (2.44)$$

по степеням  $\hbar$ .

Рассмотрим одномерный случай. Тогда (2.43) эквивалентно

$$\frac{1}{2m} (\sigma')^2 - \frac{i\hbar}{2m} \sigma'' = E - U(x). \quad (2.45)$$

Подставив (2.44) в (2.45), получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} (\sigma'_0)^2 = E - U, \\ \sigma'_0 \sigma'_1 - \frac{1}{2} \sigma''_0 = 0, \\ 2\sigma'_0 \sigma'_2 + (\sigma'_1)^2 + \sigma''_1 = 0, \quad \text{и т. д.} \end{cases} \quad (2.46)$$

Из первого уравнения (2.46) получаем, что

$$\sigma_0 = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{2m(E - U(x))} dx = \pm \int_{x_0}^x p(x) dx, \quad (2.47)$$

где  $p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$  — классический импульс частицы. Это верно, если

$$\frac{\hbar |\sigma''_0|}{(\sigma'_0)^2} \ll 1, \quad \frac{\hbar p'}{p^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\hbar}{p} \right) = \frac{d\lambda}{dx} \ll 1. \quad (2.48)$$

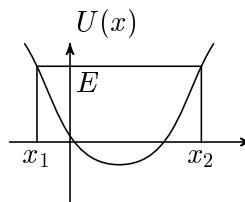


Рис. 2.7.

Последнее равенство можно интерпретировать как условие применимости квазиклассического приближения: длина частицы должна мало меняться на расстояниях, сравнимых с этой длиной. Перепишем (2.48), используя классическое равенство  $p' = -\frac{m}{p} \frac{dU}{dx}$ . Тогда (2.48) эквивалентно

$$\frac{m\hbar}{p^3} \frac{dU}{dx} \ll 1. \quad (2.49)$$

Итак, квазиклассическое приближение неприменимо при очень маленьком импульсе частицы и заведомо неприемлемо вблизи *точек поворота*, т. е. точек  $x$ , в которых  $E = U(x)$ .

Вдали от точек поворота из второго уравнения (2.46) получаем  $\sigma'_1 = -\frac{\sigma''_0}{2\sigma_0} = -\frac{1}{2} \frac{p'}{p}$ . Следовательно,

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} \ln p. \quad (2.50)$$

Подставляя (2.47) и (2.50) в (2.44), получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1 + \dots)} = \\ &= \begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{p}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p \, dx \right\} + \frac{c_2}{\sqrt{p}} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p \, dx \right\}, \\ \frac{c_1}{\sqrt{|p|}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p| \, dx \right\} + \frac{c_2}{\sqrt{|p|}} \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p| \, dx \right\}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.51)$$

где первое решение (2.51) задает волновую функцию  $\psi(x)$  в классических областях ( $U(x) < E$ ), а второе — в классически недоступных

областях ( $U(x) > E$ ). Заметим, что в окрестностях точек возврата потенциал  $U(x)$  можно заменить на линейный, для которого существует точное решение — функция Эйри.

Пусть  $U(a) = E$  и область  $U(x) > E$  — это  $x > a$ . Из условий на бесконечности следует, что в этой области

$$\psi(x) = \frac{c}{2\sqrt{|p|}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx \right\}.$$

Возникает вопрос о том, как «сшить» это решение с решением в области  $x < a$ , если квазиклассика неприменима вблизи точки  $x = a$ .

Будем рассматривать решение, как функцию комплексного переменного  $x$  и обойдем точку  $x = a$ . Будем совершать обход вокруг точки  $x = a$  против часовой стрелки в области, где  $E - U(x) = F_0(x - a)$ . Можно ограничиться первым членом тейлоровского приближения, но верна квазиклассика.

- 1) Первое условие выполнено, если  $|x - a| \ll L$  — масштаб изменения  $U(x)$  ( $F_0 \equiv \frac{dU}{dx}(a)$ ).
- 2) Второе условие верно, если выполнено (2.49):

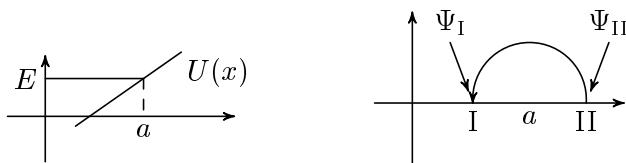
$$\frac{m\hbar}{p^3} \frac{dU}{dx} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{\hbar}{\sqrt{mF_0}} \ll |x - a|^{3/2}.$$

Из этих условий получаем условие совместности

$$L^{3/2} \gg \frac{\hbar}{\sqrt{m|F_0|}}. \quad (2.52)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \frac{c}{2(2m|F_0|)^{1/4}} \cdot \frac{1}{(x - a)^{1/4}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_a^x \sqrt{2m|F_0|(x - a)} dx \right\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$



Проследим за обходом в верхней полуплоскости ( $\varphi$  меняется от 0 до  $\pi$ )

$$\begin{aligned} \int_a^x \sqrt{x-a} dx &= \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} = \\ &= \frac{2}{3}\rho^{3/2} e^{i\frac{3\varphi}{2}} = \frac{2}{3}\rho^{3/2} \left( \cos \frac{3\varphi}{2} + i \sin \frac{3\varphi}{2} \right). \quad (2.54) \end{aligned}$$

Подставив (2.54) в (2.53) и сравнив с первым уравнением (2.51), получаем  $c_1 = 0$  и  $c_2 = \frac{1}{2}ce^{-i\pi/4}$ .

Точно так же, продолжая через нижнюю полуплоскость, получаем  $c_1 = \frac{c}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

$$\begin{aligned} \psi_{II} &= \frac{c}{2\sqrt{|p|}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_a^x |p| dx \right\}, \\ \psi_I &= \frac{c}{\sqrt{p}} \cos \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

В случае сшивания решений слева направо ( $U(x)$  имеет вид, показанный на рис. 2.8) получаются следующие решения:

$$\psi_{III} = \frac{c}{2\sqrt{|p|}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx \right\},$$

$$\psi_I = \frac{c}{\sqrt{p}} \cos \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_b^x p dx - \frac{\pi}{4} \right\}.$$

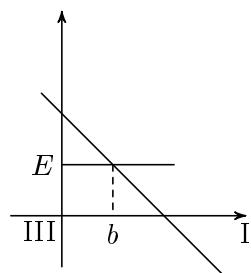


Рис. 2.8.

## Правило квантования Бора–Зоммерфельда

Применим полученные в предыдущем параграфе результаты для получения правил квантования Бора–Зоммерфельда.

$$\begin{aligned}\psi_I &= \frac{c}{\sqrt{p}} \cos \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_a^x p dx + \frac{\pi}{4} \right\} = \\ &= \frac{\tilde{c}}{\sqrt{p}} \cos \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_b^x p dx - \frac{\pi}{4} \right\} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{p}} \cos \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_b^x p dx - \frac{1}{\hbar} \int_b^a p dx + \frac{\pi}{4} \right\}.\end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{1}{\hbar} \int_b^a p dx = \frac{\pi}{2} + \pi n$  и  $\tilde{c} = (-1)^n c$ , или

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{\gamma} p dx = n + \frac{1}{2}, \quad (2.55)$$

где контур  $\gamma$  имеет вид, показанный на рис. 2.9.

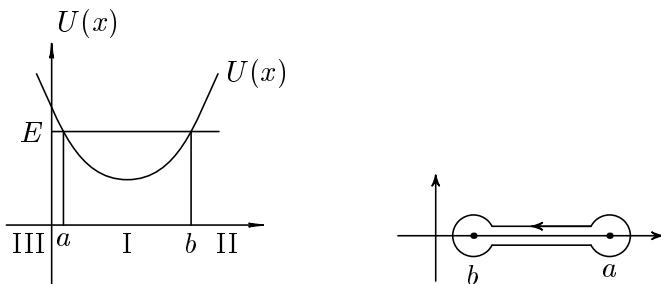


Рис. 2.9.

Уравнение (2.55) называется *условием квантования Бора–Зоммерфельда* и является уравнением на собственные значения  $E$ .

Условие квазиклассики обычно эквивалентно условию  $n \gg 1$ , но для некоторых потенциалов это условие выполняется начиная с  $n = 1$ .

Остановимся еще на условии нормировки.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx \approx \int_b^a |\psi|^2 dx = |c|^2 \int_b^a \frac{dx}{2p} = \frac{c^2}{2m} \int_b^a dt = \frac{c^2}{2m} \frac{T}{2},$$

где  $T$  — период колебания классической частицы в поле с данным потенциалом и энергией  $E$ .

## Прохождение через барьер

Пусть потенциал имеет вид, показанный на рис. 2.10.

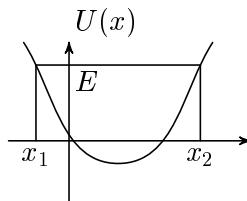


Рис. 2.10.

Напишем квазиклассическое решение в различных областях.  
III)  $x > b$ .

$$\psi_{\text{III}} = \frac{c}{\sqrt{p}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_b^x p dx + \frac{i\pi}{4} \right\}.$$

Там, где  $U(x) \rightarrow 0$ ,  $\psi_{\text{II}} \rightarrow e^{i \frac{px}{\hbar}}$ .  $E - U(x) = F_0 \cdot (x - b)$ ,  $F_0 > 0$ .

II)  $a < x < b$ . Продолжаем  $\psi_{\text{III}}$  в область II:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{III}} &= \frac{c}{\sqrt{2mF_0}} \frac{1}{(x-b)^{1/4}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sqrt{2mF_0} \int_b^x \sqrt{x-b} dx + \frac{i\pi}{4} \right\} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{2mF_0}} \frac{1}{(b-x)^{1/4}} \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_b^x |p| dx \right\}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что  $\int_b^x \sqrt{x-b} dx = \frac{2}{3}\rho^{3/2} \left( -\sin \frac{3\varphi}{2} + i \cos \frac{3\varphi}{2} \right)$  и сократили  $e^{i\frac{\pi}{4}}$  в числителе и в знаменателе. Получаем

$$\psi_{II} = \frac{c}{\sqrt{|p|}} \exp \left\{ \int_b^x |p| dx \right\}.$$

I)  $x < a$ . Продолжим решение  $\psi_{II}$  в эту область.

**Задача.** Проверьте, что получится ответ

$$\psi_I = \frac{ce^{\frac{1}{\hbar} \int_b^a |p| dx}}{\sqrt{p}} \left\{ \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx \right\} + \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx \right\} \right\} \quad (2.56)$$

Первый член в формуле (2.56) представляет для больших по модулю отрицательных  $x$

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx \right\} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$$

отраженную от барьера волну, а второй

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_a^x p dx \right\} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

падающую на барьер волну.

Тогда решение  $\psi_{III}$  — это прошедшая сквозь барьер волна (туннельный эффект).

Пусть падающая волна имеет вид  $e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ , отраженная  $Ae^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ , а прошедшая  $Be^{\frac{ipx}{\hbar}}$ . Коэффициентом отражения называется величина  $\frac{|A|^2}{|A|^2 + |B|^2}$ , а коэффициентом прохождения — величина  $D = \frac{|B|^2}{|A|^2 + |B|^2}$ .

## 7. Уравнение Дирака. Релятивистская теория электрона

Уравнение  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}$  инвариантно относительно преобразований Галилея, но релятивистски неинвариантно. Это видно хотя бы из того, что  $t$  и  $x_i$  входят несимметрично.

Пусть  $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$  — 4-вектор.

$$\psi = \psi(x^0, x^1, x^2, x^3) \text{ и } \hat{p}_0 = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^0}, \hat{p}_k = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k}, \hat{p}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

— тоже 4-векторы.

Классический релятивистски инвариантный гамильтониан свободной частицы имеет вид  $H = \text{const} \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$ , поэтому квантование дает уравнение

$$[\hat{p}_0 - (m^2 c^2 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2)^{1/2}] \psi = 0. \quad (2.57)$$

Домножив на сопряженное значение, получим уравнение, более симметричное относительно  $p_0$  и  $p_k$ :

$$[\hat{p}_0^2 - m^2 c^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2] \psi = 0. \quad (2.58)$$

Это уравнение называют *уравнением Клейна-Гордона*. К сожалению, уравнение (2.58) — не совсем то, что нам нужно. Хотя оно лоренц-инвариантно ( $\hat{p}_0^2 - \sum \hat{p}_k^2$  — это квадрат 4-вектора), оно имеет больше решений, чем (2.57), и не является линейным по  $p_0$ . Попробуем найти уравнение, которое было бы:

- 1) лоренц-инвариантно,
- 2) линейно по  $p_k$ , в частности, имело бы первый порядок по времени,
- 3) и плоские волны  $\psi = e^{\frac{iE}{\hbar}t} e^{i\frac{\vec{p}\vec{x}}{\hbar}}$ , являющиеся решениями уравнения (2.58), являлись бы его решениями.

Будем искать это уравнение в виде

$$[\hat{p}_0 - \alpha_1 \hat{p}_1 - \alpha_2 \hat{p}_2 - \alpha_3 \hat{p}_3 - \beta] \psi = 0. \quad (2.59)$$

Из-за однородности пространства-времени  $\alpha$  и  $\beta$  не должны зависеть от  $x^\mu$ . Умножив (2.59) на сопряженное значение, получим

$$[p_0^2 - \alpha_i \alpha_j p_i p_j - (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i - \beta^2] \psi = 0.$$

В этом месте можно считать, что  $\alpha_i$  и  $\beta$  — не числа, а что-то другое. Дирак назвал их «гиперчислами». В любом случае, это некоторая алгебраическая структура.

Из свойств уравнения получаем соотношения на  $\alpha_i$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_j = 2\delta_{ij}, \\ \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0, \\ \beta^2 = m^2 c^2. \end{cases}$$

Находим, что  $\beta = mc\alpha_0$  и все  $\alpha_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  образуют алгебру Клиффорда

$$\mathcal{K} = \{ \alpha_\mu \mid \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \}.$$

Уравнение (2.59) можно переписать в виде

$$[\hat{p}_0 - \vec{a} \hat{\vec{p}} - \alpha_0 mc] \psi = 0. \quad (2.60)$$

**Утверждение.** Наименьшее представление алгебры  $\mathcal{K}$  — четырехмерное. Следовательно,  $\psi$  — четырехкомпонентная функция. В физической литературе  $\psi$  называют *спинорами*.

Одна из реализаций этого представления:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Четырехкомпонентность релятивистской квантовой частицы связана с тем, что что не существует двумерных представлений группы Лоренца. Правда, существуют двумерные представления группы собственных преобразований группы Лоренца.

## Выключение магнитного поля

Следуя классическому правилу, гамильтониан частицы в электромагнитном поле можно получить, сделав замену

$$\begin{cases} p_0 \rightarrow p_0 + \frac{e}{c} A_0, \\ \vec{p} \rightarrow \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}. \end{cases}$$

Получаем уравнение в поле

$$\left[ \hat{p}_0 + \frac{e}{c} A_0 - \vec{\alpha} \left( \hat{\vec{p}} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \alpha_0 mc \right] \psi = 0. \quad (2.61)$$

Из вида замены сразу получается лоренц-инвариантность уравнения (2.61).

Можно проверить, что (2.61) инвариантно относительно калибропаровых преобразований  $A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ ,  $\psi \mapsto e i \frac{e}{\hbar c} \psi$ .

## Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца

Начиная с этого параграфа перестанем писать символ « $\hat{}$ » над операторами. Перепишем уравнение (2.61). Для этого умножим (2.61) слева на  $\alpha_0$  и, введя новые переменные

$$\Delta_\mu = p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu, \quad \gamma^0 = \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_i = -\alpha_0 \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

получим уравнение

$$(\gamma^\mu \Delta_\mu - mc) \psi(x) = 0. \quad (2.62)$$

Переменные  $\gamma^\mu$  удовлетворяют условиям  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$ , где  $\{a, b\} = ab + ba$ , а

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— стандартная лоренцева метрика.

Чтобы понять, как ведет себя при преобразованиях Лоренца решение уравнения (2.62), воспользуемся лоренц-инвариантностью (2.62), сделав бесконечно малое преобразование Лоренца  $\tilde{x}^\mu = a_\nu^\mu x^\nu$ , где  $a_\nu^\mu = \delta_n^\mu u + \omega_\nu^\mu$  и  $\omega_\mu^\lambda g_\lambda^\nu + g_\lambda^\mu \omega_\lambda^\nu = 0$ . Тогда

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu, \\ p^\mu \rightarrow \tilde{p}^\mu = p^\mu + \omega_\nu^\mu p^\nu, \\ \psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x), \\ \Delta_\mu \rightarrow \tilde{\Delta}_\mu = a_\mu^\nu \Delta_\nu. \end{cases}$$

Симметрия уравнения (2.62) означает, что  $\tilde{\psi}(x) = S(a)\psi(x)$  является решением уравнения (2.62), где  $S(a)$  — неизвестная матрица ( $\tilde{\psi}_i(x)$  являются линейными комбинациями  $\psi_i(\tilde{x})$ ), т. е. выполняется равенство

$$[\gamma^\mu \Delta_\mu - mc]S(a)\psi(\tilde{x}) = 0.$$

Домножив слева на  $S(a)^{-1}$  и вспомнив, что  $\tilde{p}_\mu = a_\mu^\nu p_\nu$ ,  $p_\mu = \bar{a}_\mu^\nu \tilde{p}_\nu$ , где  $\bar{a}_\mu^\nu a_\nu^\lambda = \delta_\mu^\lambda$ , приведем последнее уравнение к точке  $\tilde{x}$ :

$$[S^{-1}\gamma^\mu S \bar{a}_\mu^\nu \tilde{\Delta}_\nu - mc]\psi(\tilde{x}) = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением Дирака, если  $S(a)$  удовлетворяет условию

$$S^{-1}\gamma^\mu S \bar{a}_\mu^\nu = \gamma^\nu, \quad \text{или} \quad S^{-1}\gamma^\mu S = a_\nu^\mu \gamma^\nu. \quad (2.63)$$

Будем искать матрицу  $S$  для бесконечно малого преобразования Лоренца в виде  $S = \mathbb{1} + \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$ , где  $\sigma_{\mu\nu}$  — неизвестные матрицы. Тогда из уравнения (2.63) получаем ( $a_\nu^\mu = \delta_n^\mu u + \omega_\nu^\mu$ )

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

## Магнитный момент электрона

Перепишем уравнение Дирака в виде уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad \text{где} \quad H = -eA_0 + c\vec{\alpha} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \alpha_0 mc^2$$

и положим  $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . На  $u$  и  $v$  получим уравнения

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -eA_0 u + \left[ c\vec{\sigma} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] v + mc^2 u, \\ i\hbar \frac{\partial v}{\partial t} = -eA_0 v + \left[ c\vec{\sigma} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] v - mc^2 v. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде  $\psi = e^{-iE_n t/\hbar} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , где функции  $\varphi, \chi$  не зависят от времени.

Кроме того, перейдем к предельной ситуации  $v \ll c$ , т. е. будем считать, что  $E_n = cm^2 + E$ ,  $E \ll mc^2$ . Это означает, что импульсы малы и поля слабо меняются. Подставляя  $\psi$  в предыдущую систему, получаем

$$\begin{cases} c(\vec{\sigma} \vec{\nabla}) \chi - (E + eA_0) \varphi = 0, \\ (2mc^2 + E + eA_0) \chi = c(\vec{\sigma} \vec{\nabla}) \varphi, \end{cases}$$

где  $\nabla = p + \frac{e}{c} A$ . Из второго уравнения получаем, что  $\chi \approx \frac{\vec{\sigma} \vec{\nabla}}{2mc} \varphi$ , так как  $2mc^2 \gg E + eA_0$ . Следовательно,  $\chi \ll \varphi$ . Подставляя  $\chi$  в первое уравнение, получаем

$$\left[ \frac{(\vec{\sigma} \vec{\nabla})^2}{2m} - eA_0 \right] \varphi = E\varphi. \quad (2.64)$$

Вспоминая свойства  $\sigma_i$ , а именно,  $\sigma^2 = 1$  и  $\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3$  и т. д., получаем

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \vec{B})(\vec{\sigma} \vec{C}) &= (\vec{B} \vec{C}) + i(\vec{\sigma} [\vec{B}, \vec{C}]), \\ \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) &= \frac{e}{c} (\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p}) = \\ &= -i\hbar \frac{e}{c} \operatorname{rot} \vec{A} = -i\hbar \frac{e}{c} \vec{H}, \\ (\vec{\sigma} \vec{\nabla})^2 &= \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{\hbar e}{c} (\vec{\sigma} \vec{H}). \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что уравнение (2.64) эквивалентно

$$H\varphi = E\varphi,$$

где

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{\hbar e}{2mc} (\vec{\sigma} \vec{H}) - eA_0.$$

Предпоследний член этого гамильтониана по аналогии с классическим гамильтонианом интерпретируется как взаимодействие собственного магнитного момента  $\vec{\mu} = -\frac{\hbar e}{2mc}\vec{\sigma}$  с магнитным полем  $\vec{H}$ .

Найдем выражение для момента количества движения электрона. Будем искать момент в виде  $\frac{1}{\hbar}\vec{M} = \vec{L} + \vec{S} = [\vec{r}, \vec{p}] + \vec{S}$ , где  $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$  — постоянные матрицы, и определим  $\vec{M}$  из инвариантности  $\vec{M}$  для свободного электрона. На языке квантовой механики это означает, что  $\vec{M}$  — первый интеграл, т. е. коммутирует с гамильтонианом свободного электрона  $H = c\vec{a}\vec{p} + \alpha_0 mc^2$ . Итак, выполняются уравнения  $[\vec{M}, \vec{H}] = 0$  или

$$[\vec{L}, c\vec{a}\vec{p}] + [\vec{S}, c\vec{a}\vec{p}] = 0. \quad (2.65)$$

Перепишем (2.65) в терминах операторов  $l_i$  и  $s_i$ :

$$\begin{aligned} [l_i, c\alpha_k p_k] + [s_i, c\alpha_k p_k] &= 0, \\ c\alpha_k [l_i, p_k] + c[s_i, \alpha_k] p_k &= 0. \end{aligned}$$

(для операторов  $l_i$  величины  $\alpha_k$  постоянны, а  $s_i$  и  $p_k$  коммутируют). Последнее уравнение можно переписать, пользуясь перестановочными соотношениями между  $l_i$  и  $p_k$ , так:

$$i\varepsilon_{ikl}\alpha_k p_l + \begin{bmatrix} 0 & [s_i, \sigma_k] \\ [s_i, \sigma_k] & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Будем считать (мы опять угадываем ответ), что  $s_i = \lambda\sigma_i$ . Из (2.66) получаем

$$i\varepsilon_{ikl}\alpha_k p_l + i\varepsilon_{ikl} \begin{bmatrix} 0 & [s_i, p_k] \\ [s_i, p_k] & 0 \end{bmatrix} p_k = 0,$$

или

$$i\varepsilon_{ikl}(\alpha_k p_l + 2\lambda\alpha_l p_k) = 0.$$

Последнее равенство выполняется, если  $2\lambda = 1$ . Окончательно получаем, что  $s_i = \sigma_i/2$ . Если обозначить  $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)$ , то  $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$  и  $\frac{1}{\hbar}\vec{M} = \vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}$ . Исходя из этого, собственный магнитный момент электрона правильно записывать как

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{mc} \left( \frac{\hbar\vec{\sigma}}{2} \right) = -\frac{e\hbar}{mc} \vec{S}.$$

Вспомнив, что орбитальный момент равен

$$\vec{\mu}_{\text{орбитальное}} = \frac{\hbar e}{2mc} \vec{L} = \mu_B \vec{L},$$

где константа  $\mu_B = \hbar E / 2mc$  называется *магнетоном Бора*, получаем

$$\vec{\mu} = 2\mu_b \vec{S}.$$

# ЧАСТЬ 3

## ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

### 1. Основные определения

Рассмотрим двумерную квадратную решетку, образованную пересечением  $m$  горизонтальных и  $n$  вертикальных прямых. Полное число узлов в решетке обозначим через  $N$ . Обычно мы будем рассматривать случай  $m = n$ , поэтому  $N = n^2$ . Каждый узел задается вектором  $x = (x_1, x_2)$ . Будем считать, что в каждом узле  $x$  расположена частица. Состояние частицы в узле  $x$  определяется величиной  $\sigma_x$ , называемой *спином*, которая может принимать два значения  $\pm 1$ . Спины тогда можно представлять себе как стрелочки, торчащие перпендикулярно плоскости решетки, соответственно вверх или вниз. Таким образом, на решетке задана функция  $\sigma_x$ . Так введенная модель носит название *двумерной модели Изинга*.

Совокупность значений всех  $N$  спинов решетки  $\sigma$  назовем *конфигурацией* или *состоянием* системы. Поскольку каждый спин может принимать два значения, и все спины не зависят друг от друга, мы, таким образом, получаем  $2^N$  различных конфигураций.

Энергией состояния  $\sigma$  назовем функционал

$$E(\sigma) = -J \sum_{(x,y)} \sigma_x \sigma_y - H \sum_x \sigma_x. \quad (3.1)$$

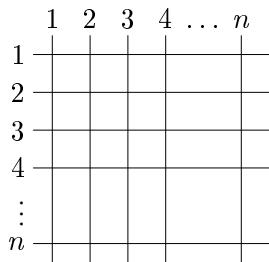


Рис. 3.1.

В первом слагаемом суммирование ведется по всем парам соседних узлов  $(x, y)$ , во втором — по всем узлам решетки  $x$ .  $J, H$  — некоторые параметры.

В 1901 году Гиббсом было получено так называемое *каноническое распределение* (его также часто называют *распределением*

Гиббса), играющее важнейшую роль в статистической физике. Суть его заключается в том, что статистическое распределение любого макроскопического тела, являющегося сравнительно малой частью некоторой большой замкнутой системы, определяется выражением

$$w_n = A \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right), \quad (3.2)$$

где  $w_n$  есть вероятность того, что система находится в состоянии  $n$ ,  $E_n$  — энергия этого состояния,  $T$  — абсолютная температура. Мы видим, что вероятность уменьшается с ростом  $E_n$ . Поэтому система большую часть времени проводит в состоянии с наименьшей энергией.

В частности, если  $J$  и  $H$  в выражении (3.1) положительны, модель Изинга описывает идеализированную физическую систему — двумерный ферромагнетик. Решетка модели соответствует кристаллической решетке магнетика, спины изображают магнитные моменты атомов кристалла. Параметрам  $J$  и  $H$  можно придать физический смысл:  $H$  — это напряженность внешнего магнитного поля, перпендикулярного плоскости решетки,  $J$  характеризует обменное взаимодействие магнитных моментов. В основном состоянии все спины направлены в одну сторону, что приводит к возникновению ненулевого магнитного момента всего кристалла.

Используя математический аппарат статфизики, можно, как говорят, решить модель Изинга, то есть найти связи между макроскопическими величинами, характеризующими систему, такими как температура, теплоемкость, полный магнитный момент.

Величина

$$Z_N = \sum_{\sigma} e^{-E(\sigma)/T} = \sum_{\sigma} \exp\left(K \sum_{(x,y)} \sigma_x \sigma_y + h \sum_x \sigma_x\right), \quad (3.3)$$

где  $K = J/T$ ,  $h = H/T$ , называется *статистической суммой* (или *статсуммой*). Здесь суммирование ведется по всем возможным состояниям системы.

Через  $Z_N$  выражаются все термодинамические функции. В частности, *свободная энергия* определяется следующим образом:

$$F_N = -T \ln Z_N.$$

*Весом состояния*  $\sigma$  называется величина (3.2), в которой нормированная постоянная  $A$  положена равной  $Z_N^{-1}$ :

$$W(\sigma) = Z_N^{-1} e^{-E(\sigma)/T}.$$

Сумма весов по всем состояниям равна 1.

Для любой функции состояния  $X(\sigma)$  можно определить ее *среднее* (математическое ожидание), взяв сумму с весами по всем состояниям:

$$\langle X(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} X(\sigma) W(\sigma).$$

Важные примеры средних:

- а) Средняя энергия  $U = \langle E(\sigma) \rangle$ .
- б) Намагниченность  $m_N = \langle M(\sigma) \rangle / N$ , где  $M(\sigma) = \sum_x \sigma_x$ .

Имеет место следующее тождество для средней энергии:

$$U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{T} \right).$$

Среднее вида  $\langle \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \dots \sigma_{x_M} \rangle$  называется *M-точечной корреляционной функцией*.

## Термодинамический предел

Из интуитивных соображений в физике делается вывод о существовании так называемых *термодинамических пределов*. Рассматриваются решетки все больших размеров и осуществляется предельный переход при  $N \rightarrow \infty$ :

$$\varepsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle E(\sigma) \rangle}{N}, \quad f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N}, \quad m = \lim_{N \rightarrow \infty} m_N.$$

При этом считается, что большая решетка получается из меньшей как бы наращиванием узлов по краям меньшей, а термодинамические пределы не зависят от того, как именно происходит это наращивание. В частности, предел будет тем же, если мы рассмотрим вместо квадратной решетки  $n \times n$  решетку  $n_1 \times n_2$ , где  $n_1$  и  $n_2$  стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

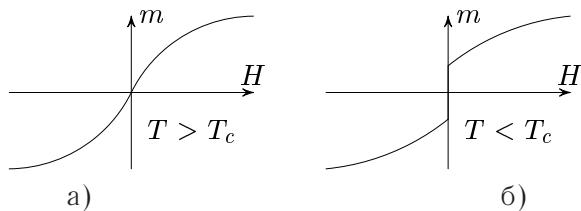


Рис. 3.2.

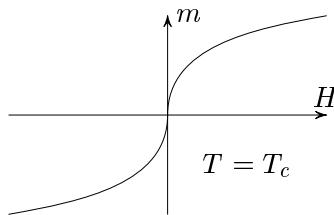


Рис. 3.3.

Например, предполагается существование термодинамического предела корреляционных функций  $\langle \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \dots \sigma_{x_M} \rangle$ , и этот предел зависит только от взаимного расположения узлов решетки  $x_1, \dots, x_M$ . На самом деле такая ситуация осуществляется, если в системе нет дальнего порядка. В общем случае в зависимости от граничных условий могут существовать разные термодинамические пределы.

Для ферромагнетиков характерно явление *спонтанной намагниченности*. При достаточно высокой температуре  $T$  зависимость намагниченности  $m$  от внешнего магнитного поля  $H$  такова, что при уменьшении  $H$  до нуля  $m$  также падает до нуля (рис. 3.2а). Если же температура меньше некоторой критической температуры  $T < T_c$ , то даже в отсутствие магнитного поля ( $H = 0$ ) намагниченность отлична от нуля (рис. 3.2б). Ее величина и называется спонтанной намагниченностью  $m_0$ , а критическая температура  $T_c$  называется *температурой Кюри*.

В точке  $T = T_c$  в отсутствие магнитного поля намагниченность  $m$  равна нулю, однако, производная  $\chi = \partial m / \partial H$  (восприимчивость), обращаясь в бесконечность, терпит в этой точке разрыв (рис. 3.3).

На рис. 3.4 показана зависимость спонтанной намагниченности от температуры. В точке  $T = T_c$  имеет место фазовый переход второго рода, который и будет главным предметом нашего изучения. Он харак-

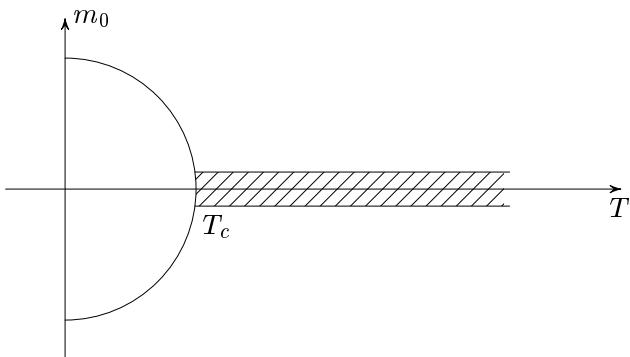


Рис. 3.4.

теризуется тем, что термодинамические функции либо их производные как функции  $H$  и  $T$  имеют особенности (обращаются в бесконечность) в точке фазового перехода ( $T = T_c$ ,  $H = 0$ ).

Возникает естественный вопрос: «Может ли статистическая физика объяснить эти сингулярности?»

Если взять большое, но конечное  $N$ , никаких сингулярностей в модели Изинга не возникает, поскольку все функции, определенные нами, являются аналитическими. Сингулярности появляются при переходе к термодинамическому пределу.

В одномерной модели, решенной Изингом в 1925 году расходящиеся отсутствуют даже после предельного перехода. Это обстоятельство вызывало сомнения в том, что решеточные модели смогут объяснить существование критической точки.

Только в 1944 году, после блестящего решения Онсагером двумерной модели Изинга, стало ясным, что решеточные модели действительно являются мощнейшим средством изучения фазовых переходов второго рода. Однако не будем забегать вперед и рассмотрим сейчас одномерную модель, поскольку в процессе ее решения мы введем ряд понятий, играющих важнейшую роль во всем дальнейшем изложении.

## Одномерная модель Изинга

В одномере решетка модели представляет из себя цепочку, содержащую  $N = n$  узлов. Будем считать, что первый и последний узлы —

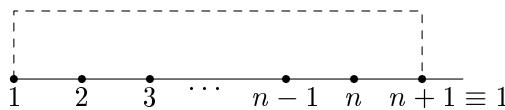


Рис. 3.5.

соседние. Такие граничные условия называются тороидальными. Узел  $i$  характеризуется спином  $\sigma_i$  ( $\sigma_i = \pm 1$ ; см. рис. 3.5).

Статистическая сумма имеет вид

$$Z_N = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} \exp \left( K \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} + h \sum_{i=1}^N \sigma_i \right),$$

или

$$Z_N = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N} T(\sigma_1, \sigma_2) T(\sigma_2, \sigma_3) \dots T(\sigma_N, \sigma_1),$$

где

$$T(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = \exp \left( K \sigma_i \sigma_{i+1} + h \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2} \right)$$

(такая запись удобна симметрией  $T(\sigma, \sigma') = T(\sigma', \sigma)$ ). Матрица  $T$  называется трансфер-матрицей.

$T(\sigma, \sigma')$  удобно записать в виде симметрической матрицы  $2 \times 2$ :

$$T = \begin{pmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что в этих обозначениях статсумма дается выражением

$$Z_N = \text{Tr } T^N.$$

При замене  $T \rightarrow X V X^{-1}$  значение следа  $\text{Tr } T^N$  не изменится. Можно привести  $T$  к диагональному виду  $T = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1 > \lambda_2$ , подобрав подходящую матрицу  $X$ .

Получаем, что

$$Z_N = \text{Tr } T^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N = \lambda_1^N \left( 1 + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right).$$

При переходе к термодинамическому пределу второе слагаемое в скобках стремится к нулю, и мы получаем

$$Z_N = \lambda_1^N.$$

Вычисляя собственные значения, видим, что

$$\lambda_1 = e^K \operatorname{ch} h + (e^{2K} \operatorname{sh}^2 h + e^{-2K})^{1/2}.$$

Отсюда следует, что статсумма  $Z_N$ , свободная энергия, а также намагниченность являются аналитическими функциями  $H$  и  $T$ . Таким образом, система не имеет фазового перехода при положительных температурах.

### Низкотемпературное и высокотемпературное разложения

Вернемся к двумерной модели. С этого момента будем считать, что магнитное поле отсутствует, то есть  $h = 0$ . Тогда статсумма (3.3) сводится к

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left( K \sum_{(x,y)} \sigma_x \sigma_y \right). \quad (3.4)$$

Кроме того, будем накладывать тороидальные граничные условия, то есть отождествлять узлы, принадлежащие противоположным границам.

Центры граней нашей решетки  $\mathcal{L}$  образуют новую решетку  $\mathcal{L}^*$  (рис. 3.6), называемую дуальной решеткой.

Пусть  $M$  — число всех соседних пар, то есть количество ребер в решетке  $\mathcal{L}$ . Тогда  $M = 2N - n - m$  в случае незамкнутой решетки и  $M = 2N$  в случае тороидальных граничных условий.

Преобразуем статсумму следующим образом:

$$Z = \sum_{\sigma} e^{K \sum [(\sigma_x \sigma_y - 1) + 1]} = e^{KM} \sum_{\sigma} e^{K \sum (\sigma_x \sigma_y - 1)}.$$

Состояния системы можно упорядочить естественным образом.

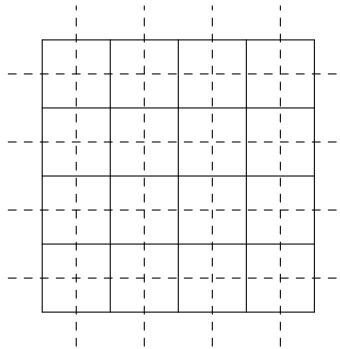


Рис. 3.6. Сплошной линией показана решетка  $\mathcal{L}$ , пунктирной — дуальная решетка  $\mathcal{L}^*$ .

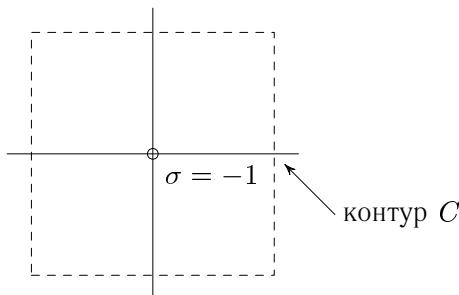


Рис. 3.7.

1) Существуют два состояния, в которых все спины направлены в одну сторону. Для них все  $\sigma_x \sigma_y = 1$  и, следовательно,

$$X(\sigma) := e^{K \sum (\sigma_x \sigma_y - 1)} = 1.$$

2) Существуют состояния, в которых один какой-то спин направлен в одну сторону, а остальные — в противоположную. Число таких состояний равно  $N$ . Для таких состояний  $X(\sigma) = (e^{-2K})^4$ . Поставим в соответствие каждому такому состоянию замкнутый контур  $C$  на дуальной решетке вокруг того узла, в котором расположен перевернутый спин (рис. 3.7). Легко видеть, что  $X(\sigma) = \kappa^{l(C)}$ , где  $l(C)$  — длина контура, а  $\kappa = e^{-2K}$ .

3) Существуют состояния с двумя перевернутыми спинами. И в этом случае можно поставить в соответствие состоянию контур на

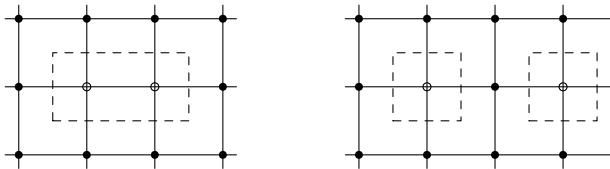


Рис. 3.8.

дуальной решетке. Здесь имеются две возможности (см. рис. 3.8). И так далее.

Заметим, что произвольному замкнутому (не обязательно связанному) контуру  $C$  на дуальной решетке  $\mathcal{L}^*$  отвечают две конфигурации  $\sigma$ , причем

$$X(\sigma) = \kappa^{l(C)}.$$

Еще раз подчеркнем, что мы понимает под словом «контур» не обязательно связанный контур. Важно только то, что он должен быть замкнутым.

Таким образом,

$$Z = e^{MK} \sum_C (e^{-2K})^{l(C)},$$

где  $C$  — замкнутые контуры на дуальной решетке, а  $\kappa = e^{-2K}$ .

Такое разложение статсуммы называется низкотемпературным, поскольку оно хорошо сходится при малых  $T$  ( $K = J/T \gg 1$ ).

Другое представление для статистической суммы (3.4) можно получить, воспользовавшись разложением сомножителя, отвечающего одному ребру решетки  $\mathcal{L}$

$$e^{K\sigma_x\sigma_y} = \operatorname{ch} K + \sigma_x\sigma_y \operatorname{sh} K = \operatorname{ch} K(1 + \sigma_x\sigma_y \operatorname{th} K).$$

Тогда

$$Z = (\operatorname{ch} K)^M \sum_{\sigma} \prod_{(x,y)} (1 + \sigma_x\sigma_y \operatorname{th} K).$$

Каждый член в этой сумме может быть представлен графически следующим образом: проводим линию вдоль ребра  $(x, y)$ , если из соответствующего множителя выбирается слагаемое  $\sigma_x\sigma_y \operatorname{th} K$ . Если же выбирается 1, то линия не проводится. Выполнив эту операцию

для всех ребер, получим контур, но теперь уже не на дуальной, а на самой решетке  $\mathcal{L}$ .

Разложим произведение по степеням  $\operatorname{th} K$ :

$$\prod_{(x,y)} (1 + \sigma_x \sigma_y \operatorname{th} K) = 1 + a_1 \operatorname{th} K + a_2 \operatorname{th}^2 K + \dots + a_M \operatorname{th}^M K.$$

Коэффициент  $a_1$  есть сумма по всем ребрам  $(x, y)$  решетки (контурам длины 1) произведений  $\sigma_x \sigma_y$  (произведений спинов на концах контура). Аналогично, коэффициент  $a_i$  есть сумма по всем контурам длины  $i$  на решетке  $\mathcal{L}$  (не обязательно связным) произведений спинов на концах контура (для замкнутых контуров в сумму входит 1, вне зависимости от того, какая рассматривается конфигурация).

При суммировании коэффициентов  $a_i$  по всем конфигурациям сократятся слагаемые, отвечающие незамкнутым контурам.

Получим

$$Z = (\operatorname{ch} K)^M 2^N \sum_C (\operatorname{th} K)^{l(C)} = (\operatorname{ch} K)^M 2^N \sum_C \kappa^{l(C)},$$

где сумма берется по всем замкнутым контурам на  $\mathcal{L}$ , а  $\kappa = \operatorname{th} K$ . Такое разложение называется *высокотемпературным*, поскольку оно хорошо сходится при больших  $T$  ( $K = J/T \ll 1$ ).

## Дуальность Крамерса–Ванье

Пусть  $\psi$  — свободная энергия на один узел решетки, то есть

$$-\psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N}$$

( $\psi$  является функцией  $K$ ). Суммы  $\sum_C \kappa^{l(C)}$  в высокотемпературном и низкотемпературном разложениях похожи, но в одном случае сумма берется по всем замкнутым контурам на решетке  $\mathcal{L}$ , а в другом — по всем замкнутым контурам на дуальной ей решетке  $\mathcal{L}^*$ . Для квадратных решеток конечного размера  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}^*$  различаются на границе. При переходе к термодинамическому пределу, когда обе решетки становятся бесконечными, этим различием можно пренебречь. В этом пределе  $M/N \rightarrow 2$ . Поэтому сравнивая два разложения, получим:

$$-\psi(K) = 2K + \Phi(e^{-2K}) = \ln(2 \operatorname{ch}^2 K) + \Phi(\operatorname{th} K), \quad (3.5)$$

где

$$\Phi(\kappa) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left( \sum_C \kappa^{l(C)} \right).$$

Равенство (3.5) называется *соотношением дуальности*.

Определим переменную  $K^*$  соотношением

$$\operatorname{th} K^* = e^{-2K}. \quad (3.6)$$

У соотношения (3.6) есть более симметричная форма, которая ясно показывает симметрию этого соотношения относительно замены  $K$  на  $K^*$  и наоборот:

$$\operatorname{sh} 2K^* \operatorname{sh} 2K = 1. \quad (3.7)$$

В дальнейшем мы всегда будем считать, что величины  $K$  и  $K^*$  связаны соотношением (3.7). Теперь можно исключить  $\Phi$  из (3.5) и написать соотношение, связывающее свободные энергии при высокой и низкой температуре (если  $K$  велико, то  $K^*$  мало):

$$\psi(K^*) = \psi(K) + 2K - \ln(2 \operatorname{ch}^2 K^*). \quad (3.8)$$

В критической точке свободная энергия является неаналитической функцией  $T$ , а следовательно, и  $K$ . Допустим, что при  $K = K_c$  имеется критическая точка, но тогда при  $K^* = K_c$   $\psi$  также будет неаналитична. Если мы предположим, что существует лишь одна критическая точка, то  $K = K^*$ . Из (3.8) получаем уравнение для критической точки:

$$2K = \ln(2 \operatorname{ch}^2 K),$$

которое тоже можно переписать в симметричной форме:

$$\operatorname{sh}^2 2K_c = 1.$$

## 2. Модель Изинга

### Решение Вдовиченко

В настоящее время не существует ни одного решения двумерной модели Изинга с магнитным полем, отличным от нуля. Тем не менее, эта

модель содержит важные предпосылки, оправдывающие ее использование в качестве модели магнетика, а именно ненулевые коротко-действующие взаимодействия и наличие критической точки.

В этом разделе мы приводим решение двумерной модели Изинга в отсутствие магнитного поля, принадлежащее Вдовиченко. Из существующих решений оно, по-видимому, наиболее простое. Суть его заключается в сведении статистической суммы в высокотемпературном приближении,

$$Z_N = (\operatorname{ch}^2 K)^M 2^N \sum_C \kappa^{l(C)}, \quad \kappa = \operatorname{th} K, \quad (3.9)$$

к спектру некоторого бесконечного оператора, который легко вычисляется.

В статсумме (3.9) суммирование ведется по замкнутым контурам  $C$  на решетке  $\mathcal{L}$ , то есть таким подмножествам ребер  $\mathcal{L}$ , у которых в каждом узле сходится четное число ребер. Используя это обстоятельство, можно ввести более удобное графическое представление для (3.9).

Пусть по решетке  $\mathcal{L}$  блуждает частица, оставляя за собой след. Рассматриваем только замкнутые траектории частицы, представляющие из себя совокупность одной или нескольких замкнутых петель. Единственным ограничением, которое мы накладываем, является отсутствие «клювов» — таких участков пути, на которых частица проходит какое-то ребро и тут же возвращается обратно.

Замкнутому контуру  $C$  на решетке  $\mathcal{L}$  (не обязательно связному) можно поставить в соответствие такие траектории частицы, от которых остается след в виде этого контура. Для контуров с самопересечениями такое представление неоднозначно. Например, контуру на рис. 3.9 можно сопоставить три разные пути частицы: одна или две петли без самопересечений и одна петля с самопересечением. Пути не различаются ориентацией или последовательностью прохождения перекрестков. Важен лишь качественный характер пути (который остается, когда точка начинает двигаться не строго по линиям сетки и срезать углы).

Пусть  $l(\Gamma)$  — длина пути  $\Gamma$ . Сумму по контурам на решетке

$$\Sigma = \sum_C \kappa^{l(C)}$$

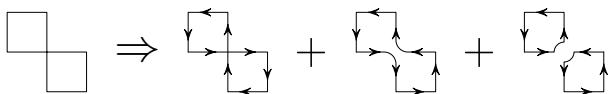


Рис. 3.9.

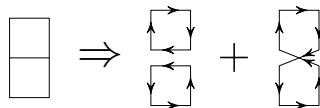


Рис. 3.10.

можно выразить через сумму по всевозможным путям чернильной точки, если для каждого пути ввести множитель  $(-1)^\nu$ , где  $\nu = \nu(\Gamma)$  — число самопересечений данного пути:

$$\Sigma = \sum_{\Gamma} (-1)^{\nu(\Gamma)} \kappa^{l(\Gamma)}. \quad (3.10)$$

Заметим, что в правой части (3.10) фигурируют члены, не соответствующие никаким кривым в исходной сумме.

Но фактически они выпадают из суммы: при построении соответствующих такому графику петель получающиеся совокупности войдут в сумму с противоположными знаками и взаимно сократятся.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $\gamma$  — связная замкнутая петля на плоскости, имеющая  $\nu$  точек самопересечения, а полный угол поворота касательной при обходе  $\gamma$  равен  $2\pi(n+1)$ . Тогда

$$(-1)^n = (-1)^\nu.$$

Сопоставим каждому узлу, через который проходит траектория, множитель  $e^{i\varphi/2}$ , где  $\varphi$  — угол поворота касательной в нем ( $\varphi = 0, \pm\pi/2$ ). Тогда после обхода петли полный множитель будет равным  $(-1)^{\nu+1}$ . Если же путь несвязный, то в результате мы получаем множитель  $(-1)^{m+s}$ , где  $s$  — число компонент, а  $m = \sum \nu$ .

Таким образом, вместо того, чтобы учитывать число пересечений, можно каждый узел в петле брать с весом  $e^{i\varphi/2}$ , а для всего пути ввести еще множитель  $(-1)^s$ :

$$\Sigma = \sum_{\Gamma} (-1)^{s(\Gamma)} \prod_{x \in \Gamma} e^{i\varphi_x/2} \kappa^{l(\Gamma)}.$$

Обозначим через  $F_l^{(1)} \equiv F_l$  сумму по всем одиночным петлям длины  $l$ , причем каждая петля входит с множителем  $e^{i\varphi_x/2}$  на каждый узел в ней:

$$F_l^{(1)} = \sum_{l(\Gamma)=l} \prod_{x \in \Gamma} e^{i\varphi_x/2}.$$

Тогда для аналогичной суммы  $F_l^{(2)}$  по путям, имеющим две компоненты связности, будем иметь

$$F_l^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{l_1+l_2=l} F_{l_1}^{(1)} F_{l_2}^{(1)}.$$

Тонким местом в этом утверждении является возможность совпадения участков компонент пути (рис. 3.10). Но такие вклады сокращаются путем, описанным выше.

Далее, для путей, имеющих  $s$  компонент связности, получим

$$F_l^{(s)} = \frac{1}{s!} \sum_{l_1+\dots+l_s=l} F_{l_1}^{(1)} \dots F_{l_s}^{(1)}.$$

В итоге сумма по всем петлям принимает вид (петли с числом узлов больше  $N$  не дают вклада в сумму, так как обязательно содержат повторяющиеся связи).

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!} \sum_{l_1, \dots, l_s=1}^{\infty} \kappa^{l_1+\dots+l_s} F_{l_1} \dots F_{l_s} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!} \left( \sum_{l=1}^{\infty} \kappa^l F_l \right)^s = \\ &= \exp \left( - \sum_{l=1}^{\infty} \kappa^l F_l \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Как видно, для того чтобы вычислить  $\Sigma$ , необходимо и достаточно уметь вычислять  $F_l$  — сумму по всем одиночным петлям длины  $l$ .

Связем с каждым узлом решетки четыре возможные направления выхода из

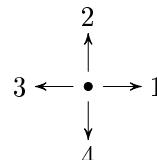


Рис. 3.11.

него, перенумеровав их специальным индексом  $\nu$  (рис. 3.11). Через  $W_L(n, m, \nu)$  обозначим сумму по связным путям длины  $L$ , соединяющим некоторый заданный узел  $x_0 = (n_0, m_0, \nu_0)$  с узлом  $x = (n, m, \nu)$ . В этой сумме учитываются множители  $e^{i\varphi/2}$  во всех узлах пути, начиная с узла, следующего за  $x_0$  и кончая узлом  $x$ . Угол  $\varphi_x$  есть изменение направления при переходе к следующей связи. Последний шаг, приводящий в узел  $n, m, \nu$ , не должен происходить в направлении, противоположном  $\nu$ .

В частности,  $W_L(n_0, m_0, \nu_0)$  есть количество замкнутых путей длины  $L$ .

Искомая сумма  $F_l$  выражается через  $W_l$  следующим образом:

$$F_l = \frac{1}{2l} \sum_{x \in \mathcal{L}} \sum_{\mu=1}^{\infty} W_l(x, \mu | x, \mu) \quad (3.12)$$

Появление  $2l$  в знаменателе объясняется тем, что каждая петля является элементом  $2l$  различных сумм вида  $W_l(x, \mu | x, \mu)$ , а именно:  $x$  пробегает  $l$  узлов, и, кроме того, возможны два направления обхода петли.

Фиксируем некоторое начало траектории  $(x_0, \mu_0)$ . Тогда можно выразить суммы по путям длины  $l + 1$  через суммы по путям длины  $l$ :

$$\begin{aligned} W_{l+1}(n, m, 1) &= W_l(n - 1, m, 1) + e^{-i\pi/4} W_l(n, m - 1, 2) + \\ &\quad + e^{i\pi/4} W_l(n, m + 1, 4), \\ W_{l+1}(n, m, 2) &= e^{i\pi/4} W_l(n - 1, m, 1) + W_l(n, m - 1, 2) + \\ &\quad + e^{-i\pi/4} W_l(n + 1, m, 3), \\ W_{l+1}(n, m, 3) &= e^{i\pi/4} W_l(n, m - 1, 2) + W_l(n + 1, m, 3) + \\ &\quad + e^{-i\pi/4} W_l(n, m + 1, 4), \\ W_{l+1}(n, m, 4) &= e^{-i\pi/4} W_l(n - 1, m, 1) + e^{i\pi/4} W_l(n + 1, m, 3) + \\ &\quad + W_l(n, m + 1, 4). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Вводя матрицу коэффициентов  $\Lambda$ , можно записать эту систему в виде

$$W_{l+1}(x, \mu) = \sum_{y, \eta} \Lambda(x, \mu | y, \eta) W_l(y, \eta). \quad (3.14)$$

Матричный элемент  $\Lambda(x, \mu|y, \eta)$  равен нулю, если узлы  $x$  и  $y$  не являются соседними.

$\Lambda$  не зависит от начала пути  $(x_0, \mu_0)$ . Следовательно, если мы рассмотрим матрицы  $\mathcal{W}_l$  с элементами  $W_l(x, \mu|x_0, \mu_0)$ , то получим для них рекуррентную формулу, обобщающую (3.14):

$$\mathcal{W}_{l+1} = \Lambda \mathcal{W}_l.$$

Согласно формуле (3.12),

$$F_l = \frac{1}{2l} \operatorname{Tr} \mathcal{W}_l = \frac{1}{2l} \operatorname{Tr} \Lambda^l \mathcal{W}_0.$$

Поскольку  $\mathcal{W}_0$  — единичная матрица, получим

$$F_l = \frac{1}{2l} \operatorname{Tr} \Lambda^l = \frac{1}{2l} \sum_i (\lambda_i)^l,$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения  $\Lambda$ .

Итак,  $F_l$ , а, следовательно, и сумма  $\Sigma$ , выражаются через собственные значения оператора, представленного матрицей  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \exp \left( - \sum_{l=1}^{\infty} \kappa^l F_l \right) = \exp \left( - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\kappa^l}{2l} \operatorname{Tr} \Lambda^l \right) = \\ &= \exp \left( - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\kappa \lambda_i)^l}{l} \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \sum_i \ln (1 - \kappa \lambda_i) \right) = \\ &= \prod_i (1 - \kappa \lambda_i)^{1/2} = (\det(E - \kappa \Lambda))^{1/2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

(здесь  $E$  — единичная матрица).

Для того, чтобы вычислить собственные значения  $\Lambda$ , перейдем к представлению Фурье (считаем, что решетка квадратная):

$$W_l(x, \mu) = \sum_p W_l(p, \mu) e^{2\pi i p x / \sqrt{N}}, \quad (3.16)$$

где  $p = (p_1, p_2)$ ,  $px = p_1 n + p_2 m$ .

Подставляя разложение (3.16) в (3.13), получим систему рекуррентных соотношений на  $W_l(p, \mu)$ . Матрица этой системы имеет блочно-диагональный вид

$$\Lambda(p, \mu | q, \eta) = \delta_{p,q} \Lambda_p(\mu, \eta)$$

с блоками

$$\Lambda_p(\mu, \eta) = \begin{pmatrix} \beta^{p_1} & \alpha^{-1}\beta^{p_2} & 0 & \alpha\beta^{p_2} \\ \alpha\beta^{p_1} & \beta^{p_2} & \alpha^{-1}\beta^{-p_1} & 0 \\ 0 & \alpha\beta^{p_2} & \beta^{-p_1} & \alpha^{-1}\beta^{-p_2} \\ \alpha^{-1}\beta^{p_1} & 0 & \alpha\beta^{-p_1} & \beta^{-p_2} \end{pmatrix},$$

где обозначено  $\alpha = e^{i\pi/4}$ ,  $\beta = e^{2\pi i/\sqrt{N}}$ .

Тогда оператор  $E - \kappa\Lambda$  в этом представлении также имеет блочно-диагональный вид с блоками

$$\begin{pmatrix} 1 - \kappa\beta^{p_1} & -\kappa\alpha^{-1}\beta^{p_2} & 0 & -\kappa\alpha\beta^{p_2} \\ -\kappa\alpha\beta^{p_1} & 1 - \kappa\beta^{p_2} & -\kappa\alpha^{-1}\beta^{-p_1} & 0 \\ 0 & -\kappa\alpha\beta^{p_2} & 1 - \kappa\beta^{-p_1} & -\kappa\alpha^{-1}\beta^{-p_2} \\ -\kappa\alpha^{-1}\beta^{p_1} & 0 & -\kappa\alpha\beta^{-p_1} & 1 - \kappa\beta^{-p_2} \end{pmatrix}.$$

Определитель оператора  $E - \kappa\Lambda$  есть произведение определителей составляющих его блоков. Поэтому

$$\Sigma = \prod_p D_p^{1/2},$$

где

$$D_p = (1 + \kappa^2)^2 - 2\kappa(1 - \kappa^2) \left( \cos \frac{2\pi p_1}{\sqrt{N}} + \cos \frac{2\pi p_2}{\sqrt{N}} \right).$$

В итоге для статсуммы получается формула

$$Z_N = (2 \operatorname{ch}^2 K)^N \prod_p D_p^{1/2}.$$

Тогда свободная энергия на узел решетки есть

$$\begin{aligned} f &= -T \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N} = \\ &= -T \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \ln (2 \operatorname{ch}^2 K) + \frac{1}{2N} \sum_p \ln D_p \right). \end{aligned}$$

В термодинамическом пределе сумма по импульсам переходит в интеграл. Для того, чтобы осуществить этот переход, мы вводим переменные

$$w_1 = \frac{2\pi p_1}{\sqrt{N}}, \quad w_2 = \frac{2\pi p_2}{\sqrt{N}}$$

так, что выполняется следующее соотношение на элемент объема:

$$1 = dp_1 dp_2 = \frac{N}{(2\pi)^2} dw_1 dw_2$$

(в пределе  $w_1, w_2$  — непрерывные переменные, меняющиеся от нуля до  $2\pi$ ).

В новых переменных выражение для  $D_p$  имеет вид

$$D_p = (\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1 - \kappa^2) \left( \sin^2 \frac{w_1}{2} + \sin^2 \frac{w_2}{2} \right).$$

Кроме того, вспомним, что  $\kappa = \operatorname{th} K$  и, следовательно,

$$-\ln(2 \operatorname{ch}^2 K) = \ln \left( \frac{1 - \kappa^2}{2} \right).$$

Окончательно, для свободной энергии получаем формулу

$$f = T \ln \left( \frac{1 - \kappa^2}{2} \right) - \frac{T}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( (\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1 - \kappa^2) \left( \sin^2 \frac{w_1}{2} + \sin^2 \frac{w_2}{2} \right) \right) dw_1 dw_2. \quad (3.17)$$

Функция  $f(T)$  может иметь особую точку только при условии, что величина

$$(\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1 - \kappa^2) \left( \sin^2 \frac{w_1}{2} + \sin^2 \frac{w_2}{2} \right)$$

обращается в нуль в некоторой точке области интегрирования Минимальное значение этого выражения как функции от  $w_1, w_2$  есть

$$(\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2. \quad (3.18)$$

Оно достигается при  $\sin(w_1/2) = \sin(w_2/2) = 0$ .

Выражение (3.18) имеет минимум, в котором оно обращается в нуль лишь при одном (положительном) значении  $\kappa = \kappa_c = \sqrt{2} - 1$ . Соответствующая температура и является точкой фазового перехода.

В интеграле (3.17) неаналитичность имеет только интеграл, основной вклад в который вносит окрестность  $w_{1,2} = 0$ . Поэтому

$$f = g(\varepsilon) - \frac{T}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(c\varepsilon^2 + A(\varepsilon)(w_1^2 + w_2^2)) dw_1 dw_2,$$

где  $\varepsilon = \kappa - \kappa_c$ , а функция  $g(\varepsilon)$  аналитична при  $\varepsilon = 0$ . Можно произвести интегрирование по  $w_i$  и получить, что

$$f \approx g_1(\varepsilon) + c\varepsilon^2 \ln(\varepsilon).$$

В результате находим поведение теплоемкости при  $T - T_c \ll T_c$ :

$$C \propto \ln(T - T_c).$$

## Решение Кауфман

Здесь мы приводим еще одно точное решение двумерной модели Изинга, принадлежащее Брурию Кауфман, ученице Онсагера.

Как и раньше, рассмотрим прямоугольную решетку  $\mathcal{L}$ ,  $n$  — количество узлов в одной строке,  $m$  — количество строк. Наложим на решетку торoidalные граничные условия, то есть будем считать, что  $m$ -я строка взаимодействует с первой строкой, а  $n$ -й столбец — с первым столбцом.

Чтобы полностью определить состояние, нужно задать значение спина в каждом узле. Однако, для наших целей вместо узлов удобнее рассматривать сразу целые строки, а именно, мы будем определять состояние как совокупность  $m$  (по числу строк) наборов  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ , где  $\nu_j$  определяется конфигурацией спинов в  $j$ -й строке. Поскольку каждая строка содержит  $n$  спинов,  $\nu_j, j = 1, \dots, m$ , могут принимать  $2^n$  различных значений.

Энергию взаимодействия спинов в  $i$ -й строке обозначим символом  $E(\nu_i)$ , а энергию взаимодействия  $i$ -й и  $(i+1)$ -й строк — символом  $E(\nu_i, \nu_{i+1})$ . Тогда полная энергия системы дается выражением

$$E = \sum_{i=1}^m E(\nu_i) + \sum_{i=1}^m E(\nu_i, \nu_{i+1}),$$

а статсумма

$$Z = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m} \prod_{i=1}^m \exp\left(-\frac{E(\nu_i)}{T}\right) \exp\left(-\frac{E(\nu_i, \nu_{i+1})}{T}\right).$$

Если мы введем матрицы  $V_1$  и  $V_2$  с элементами

$$\begin{aligned} (V_1)_{\nu_i \nu_{i+1}} &\equiv \exp(-E(\nu_i, \nu_{i+1})/T), \\ (V_2)_{\nu_i \nu_{i+1}} &\equiv \exp(-E(\nu_i)/T) \delta_{\nu_i \nu_{i+1}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

то статсумму, как легко видеть, можно записать в виде

$$Z = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m} (V_2 V_1)_{\nu_1 \nu_2} (V_2 V_3)_{\nu_2 \nu_3} \cdots (V_2 V_1)_{\nu_m \nu_1} \equiv \text{tr}(V_2 V_1)^m.$$

Матрица  $T = V_2 V_1$  является матрицей  $2^n \times 2^n$  и называется *трансфер-матрицей*.

Наша задача, как и для одномерного случая (лекция 23), свелась к нахождению собственных значений трансфер-матрицы, поскольку

$$Z = \text{tr } T^m = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^m$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения  $T$ .

Рассмотрим  $2^n$ -мерное пространство  $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_n$ , где каждое  $H_i$  — двумерное пространство с фиксированным базисом

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы из  $H$  будем обозначать  $\psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , где каждая переменная  $\sigma_i$  может принимать два значения  $\pm 1$ .

Введем операторы  $s_i$  и  $C_i$ :

$$\begin{aligned} s_i \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n) &= \sigma_i \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n) \\ C_i \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n) &= \psi(\sigma_1, \dots, -\sigma_i, \dots, \sigma_n). \end{aligned}$$

Следующие свойства введенных операторов очевидны:

$$1) \quad s_i^2 = C_i^2 = 1, \quad s_i C_i = -C_i s_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

2)  $s_i s_j = s_j s_i$ ,  $C_i C_j = C_j C_i$ ,  $s_i C_j = C_j s_i$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ .

Легко видеть, что  $s_i$  и  $C_i$ , действующие на  $H$ , можно представить в виде

$$s_i = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes s \otimes \dots \otimes 1,$$

$$C_i = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes C \otimes \dots \otimes 1,$$

где операторы  $s, C$  действуют на  $\sigma_i$  и задаются матрицами  $2 \times 2$ :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы  $s_i$ ,  $C_i$  обладают следующими легко проверяемыми свойствами:

- 1)  $s_i s_j$  диагонален для любых  $i, j$ ;
- 2)  $s_i s_{i+1}$  и  $s_j s_{j+1}$  коммутируют для любых  $i, j$ ;
- 3)  $\exp(a \sum s_i s_{i+1}) = \prod \exp(as_i s_{i+1})$ , где  $a$  — произвольная константа;
- 4)  $\exp(as_i s_{i+1})\psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \exp(a\sigma_i \sigma_{i+1})\psi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ;
- 5)  $C_i$  и  $C_j$  коммутируют для любых  $i, j$ ;
- 6)  $\exp(a \sum C_i) = \prod \exp(aC_i)$ , где  $a$  — произвольная константа.

Отсюда следует, что матрицу  $V_2$  можно записать, используя  $s_i$  и  $C_i$ :

$$V_2 = \exp \left( K' \sum_{i=1}^n s_i s_{i+1} \right),$$

где  $K'$  — горизонтальная константа связи.

Чтобы выразить через  $s_i$ ,  $C_i$  также и  $V_1$ , поступим следующим образом. Экспоненту  $e^{K\sigma_i \sigma'_i}$ , где  $K$  — вертикальная константа связи, для каждого  $i$  можно рассматривать как элемент матрицы  $M = \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix}$ , действующей на  $H_i$ . Попробуем подобрать константы  $A$ ,  $K^*$  такие, что  $M = A e^{K^* C}$ , где  $C$  — определенная выше матрица. Тогда

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix} = e^K I + e^{-K} I = \\ &= A e^{K^* C} = A(\operatorname{ch} K^*)I + A(\operatorname{sh} K^*)I, \end{aligned}$$

где  $I$  — единичная матрица.

Получаем систему

$$A \operatorname{ch} K^* = e^K, \quad A \operatorname{sh} K^* = e^{-K},$$

откуда следует, что  $A = (2 \operatorname{sh} 2K)^{1/2}$ ,  $\operatorname{th} K^* = e^{-2K}$ . (Напомним, что последнее соотношение можно переписать в более симметричном виде  $\operatorname{sh} 2K \operatorname{sh} 2K^* = 1$ .)

Итак,  $V_1$  можно записать в виде

$$V_1 = (2 \operatorname{sh} 2K)^{n/2} \exp\left(K^* \sum_{i=1}^n C_i\right).$$

Для удобства переопределим  $V_1$  следующим образом:

$$V_1 = \exp\left(K^* \sum_{i=1}^n C_i\right),$$

то есть избавимся от множителя, стоящего перед экспонентой. Тогда статсумма приобретет следующий вид

$$Z = (2 \operatorname{sh} 2K)^{mn/2} \operatorname{Tr}(V_2 V_1)^m.$$

Теперь наша задача — диагонализовать  $T = V_2 V_1$  и найти все собственные значения. Для этого мы покажем, что матрицы вида  $\exp(as_i s_{i+1})$ ,  $\exp(bC_i)$  и их произведения образуют  $2^n$ -мерное представление группы вращений  $O(2n)$ . Тогда  $V$  будет являться представлением некоторого элемента этой группы.

Оказывается, существует прямая связь между собственными значениями операторов поворотов из  $O(2n)$  и собственными значениями матриц, реализующих их  $2^n$ -мерное представление. Нахождение же собственных значений  $2n$ -мерных поворотов — это уже довольно простая задача.

Итак, мы должны показать, что матрицы  $V_1$ ,  $V_2$  — это спинорное представление матриц  $R_1$ ,  $R_2$  из  $O(2n)$ , и найти эти матрицы.

Мы начнем наше доказательство с построения алгебры с образующими  $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2n}\}$ , удовлетворяющими следующим соотношениям

$$\Gamma_k^2 = 1, \quad \Gamma_k \Gamma_l = -\Gamma_l \Gamma_k, \quad (1 \leq k, l \leq 2n). \quad (3.20)$$

Алгебра с такими образующими называется *алгеброй Клиффорда*.

Легко построить матричную реализацию алгебры Клиффорда. Например, для  $n = 1$  один из способов сделать это такой:  $\Gamma_1 = s$ ,  $\Gamma_2 = isC$ . Как легко видеть,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  являются генераторами набора матриц Паули, то есть все матрицы Паули могут быть получены посредством перемножения  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  в разных комбинациях:  $\sigma_x = i\Gamma_2\Gamma_1$ ,  $\sigma_y = -\Gamma_2$ ,  $\sigma_z = \Gamma_1$ .

Для  $n = 2$  одна из возможных реализаций алгебры Клиффорда задается набором генераторов матриц Дирака:

$$\Gamma_1 = s \otimes 1, \quad \Gamma_2 = isC \otimes 1, \quad \Gamma_3 = C \otimes s, \quad \Gamma_4 = C \otimes isC.$$

В общем случае мы можем выбрать следующую реализацию:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2k-1} &\equiv C \otimes C \otimes \dots \otimes s \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \equiv P_k, \\ \Gamma_{2k} &\equiv C \otimes C \otimes \dots \otimes isC \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \equiv Q_k, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Здесь каждое прямое произведение содержит  $n$  сомножителей. Поэтому  $\Gamma_k$  —  $2^n$ -мерные матрицы.

Если мы составим всевозможные произведения  $\Gamma_k$ , то мы получим набор из  $2^n$  «базисных» матриц:

$$1, \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \dots, \Gamma_{2n}, \Gamma_1\Gamma_2, \Gamma_1\Gamma_3, \dots, \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3, \dots$$

Теперь любая  $2^n$ -мерная матрица может быть записана в виде линейной комбинации «базисных».

В частности,  $V_1$  и  $V_2$  легко выражаются через них. Имеем:

$$\begin{aligned} C_k &= -iP_kQ_k = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes C \otimes 1 \otimes \dots, \\ s_k &= C_1C_2 \dots C_{k-1}P_k = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes s \otimes 1 \otimes \dots. \end{aligned}$$

Поэтому

$$V_1 = \prod_{i=1}^n \exp(-iK^*P_iQ_i).$$

С другой стороны, поскольку

$$\begin{aligned} s_{k+1}s_k &= iP_{k+1}Q_k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ s_1s_n &= -iP_1Q_nC_1C_2 \dots C_n \equiv -iP_1Q_n \cdot U, \end{aligned}$$

где  $U = C \otimes C \otimes \dots \otimes C$ , мы можем заключить, что

$$V_2 = \prod_{i=1}^{n-1} \exp(iK'P_{k+1}Q_k) \cdot \exp(-iK'P_1Q_nU).$$

Заметьте, что  $V_2$  можно получить из  $V_1$ , делая замену  $Q_k \rightarrow P_{k+1}$ ,  $P_k \rightarrow Q_k$ ,  $K^* \leftrightarrow K'$  (за исключением последнего множителя в  $V_2$ ). Такое преобразование (в  $2^n$ -мерном пространстве) является основной операцией спинорного анализа и, как будет вскоре показано, по существу есть преобразование эквивалентности в  $2^n$  измерениях.

Кроме (3.21), нам понадобится еще одна реализация алгебры Клиффорда. Ясно, что коммутационные соотношения

$$\Gamma_k \Gamma_l + \Gamma_l \Gamma_k = 2\delta_{kl}$$

инвариантны относительно преобразования эквивалентности в  $2^n$ -мерном пространстве. Пусть  $\Gamma_k^* = S\Gamma_k S^{-1}$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Тогда

$$\Gamma_k^* \Gamma_l^* + \Gamma_l^* \Gamma_k^* = 2\delta_{kl}.$$

Мы видим, что набор  $\Gamma_k^*$  является другой матричной реализацией алгебры Клиффорда. Например, набор

$$\begin{aligned} \Gamma_{2k-1}^* &= s \otimes s \otimes \dots \otimes C \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \equiv P_k^*, \\ \Gamma_{2k}^* &= s \otimes s \otimes \dots \otimes iCs \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \equiv Q_k^* \quad (1 \leq k \leq n), \end{aligned} \quad (3.22)$$

удовлетворяет всем коммутационным соотношениям. Он получается из (3.21) посредством преобразования, взаимозаменяющее  $C$  и  $s$  во всех операторах. Вторая реализация алгебры Клиффорда очень часто бывает удобнее первой, поэтому мы время от времени будем ею пользоваться.

Заметьте, что в качестве матрицы преобразования эквивалентности здесь выступает матрица

$$g = 2^{n/2}(C + s) \otimes (C + s) \otimes \dots \otimes (C + s) = g^{-1},$$

где

$$C + s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$gV_1g^{-1} = \prod_{i=1}^n \exp(-iK^*P_i^*Q_i^*),$$

то есть  $V_1$  приобретает диагональный вид. В то же время  $gV_2g^{-1}$  таковым не обладает.

Перейдем теперь к изучению спинорного представления ортогональной группы. Оказывается, имеет место следующая

**Теорема.** Если два набора матриц,  $\{\Gamma_k\}$  и  $\{\Gamma_k^*\}$ , удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Клиффорда, то обязательно существует преобразование  $S$  такое, что  $\Gamma_k^* = S\Gamma_k S^{-1}$ .

Будем рассматривать два набора матриц, получающихся друг из друга преобразованием эквивалентности, как один и тот же набор. Тогда мы можем сказать, что для данного  $n$  имеется только одна реализация алгебры Клиффорда. Доказательство этого утверждения основано на том факте, что автоморфизм полной матричной алгебры существует, единствен и дается соотношением эквивалентности.

Итак, пусть теперь у нас есть некоторая некоторая реализация алгебры Клиффорда  $\Gamma_k$ . Покажем, что определенные линейные комбинации  $\Gamma_k$  также удовлетворяют коммутационным соотношениям. Пусть линейная комбинация имеет вид

$$\Gamma_k^* = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}\Gamma_j \quad (1 \leq k \leq 2n),$$

где  $o_{jk}$  — пока произвольные числа, вообще говоря, комплексные. Тогда:

$$(\Gamma_k^*)^2 = \left( \sum_j o_{jk}\Gamma_j \right)^2 = \sum_{i,j} o_{ik}o_{jk}\Gamma_i\Gamma_j.$$

Для  $i \neq j$  в силу коммутационных соотношений имеем:  $o_{jk}o_{ik}\Gamma_j\Gamma_i + o_{ik}o_{jk}\Gamma_i\Gamma_j = 0$ . Не сокращаются только члены с  $i = j$ . Поскольку  $(\Gamma_i)^2 = 1$ ,

$$(\Gamma_k^*)^2 = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2.$$

Если мы теперь положим

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2 = 1,$$

то будет  $(\Gamma_k^*)^2 = 1$ . Аналогично, если мы потребуем, чтобы было

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk} o_{jl} = 0, \quad k \neq l \quad (1 \leq k, l \leq 2n),$$

то получим  $\Gamma_k^* \Gamma_l^* = -\Gamma_l^* \Gamma_k^*$ . Таким образом, набор  $\Gamma_k^*$  является реализацией алгебры Клиффорда, если  $o_{jk}$  удовлетворяют соотношениям полноты:

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk} o_{jl} = \delta_{kl} \quad (1 \leq k, l \leq 2n).$$

Но, согласно теореме,  $\Gamma_k^*$  связана с  $\Gamma_k$  посредством преобразования эквивалентности:

$$\Gamma_k^* = S(o) \cdot \Gamma_k \cdot S(o)^{-1}, \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

Мы пишем  $S(o)$ , поскольку хотим особо подчеркнуть тот факт, что преобразование эквивалентности зависит от ортогональной матрицы  $o$ .

Рассмотрим полную группу ортогональных матриц  $o$  в  $2n$ -пространстве. Мы сейчас покажем, что совокупность матриц  $S(o)$  образует  $2^n$ -мерное представление ортогональной группы. Иными словами, существует гомоморфизм  $o \rightarrow S(o)$  такой, что произведению ортогональных матриц соответствует произведение их образов:

$$S(o'') = S(o' \cdot o) = S(o') \cdot S(o).$$

Пусть

$$o: \Gamma_k \rightarrow \sum_{j=1}^{2n} o_{jk} \Gamma_j = S(o) \Gamma_k S(o)^{-1},$$

$$o': \Gamma_k \rightarrow \sum_{l=1}^{2n} o'_{lk} \Gamma_l = S(o') \Gamma_k S(o')^{-1}.$$

Тогда произведение двух операторов есть

$$o'' = o' \cdot o: \Gamma_k \rightarrow \sum_{l=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} o_{jk} o'_{lj} \Gamma_l = \sum_{l=1}^{2n} o''_{lk} \Gamma_l = S(o'') \Gamma_k S(o'')^{-1}.$$

С другой стороны,

$$o' \cdot o: \Gamma_k \rightarrow S(o') \cdot S(o) \cdot \Gamma_k \cdot S(o)^{-1} \cdot S(o')^{-1}.$$

В результате мы видим, что

$$S(o' \cdot o) = S(o'') = S(o') \cdot S(o).$$

Таким образом, каждому вращению в  $2n$  измерениях соответствует некоторое преобразование в  $2^n$ -мерном «спиновом» пространстве. Например, вращение, приводящее к замене  $Q_r \rightarrow P_{r+1}$ ,  $P_r \rightarrow Q_r$  (и тем самым к  $V_1 \rightarrow V_2$ ), имеет представление в спиновом пространстве:

$$V_2 = SV_1S^{-1}$$

(мы пренебрегли граничным членом в  $V_2$ ).

Самыми простыми ортогональными преобразованиями являются плоские повороты. Но они порождают всю ортогональную группу. Естественно спросить, сопряжению на какой элемент в спиновом пространстве соответствует элементарный поворот на угол  $\theta$  в плоскости, натянутой на  $\Gamma_k$  и  $\Gamma_l$ . Имеем

$$\begin{aligned} K: \Gamma_k &\rightarrow \cos \theta \cdot \Gamma_k - \sin \theta \cdot \Gamma_l \equiv \Gamma_k^*, \\ \Gamma_l &\rightarrow \sin \theta \cdot \Gamma_k + \cos \theta \cdot \Gamma_l \equiv \Gamma_l^*, \\ \Gamma_i &\rightarrow \Gamma_i, \quad i \neq k, l. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$S(K) = \exp(\theta/2 \cdot \Gamma_k \Gamma_l),$$

или, что то же самое,

$$S(K) = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot \Gamma_k \Gamma_l.$$

Половинный угол, фигурирующий в выражении для  $S(K)$ , есть характерная особенность спинорного представления. Он приводит к двузначности представления ортогональной группы матрицами  $S(o)$ .

Углы вращения в  $K$  могут быть не только вещественными. В частности, как мы увидим в дальнейшем, матрице  $T$  соответствует вращение на мнимый угол.

Особенно простой вид  $S(K)$  имеет в случае  $\Gamma_k = P_k^*$ ,  $\Gamma_l = Q_k^*$ :

$$\begin{aligned} S(K) &= \exp\left(\frac{\theta}{2}P_k^*Q_k^*\right) = \exp\left(\frac{i\theta}{2}s_k\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}s_k = \\ &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \cdot s\right) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 = \\ &= 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1. \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что собственные значения  $S(K)$  имеют  $2^{n-1}$ -кратную степень вырождения и равны  $e^{i\theta/2}$ ,  $e^{-i\theta/2}$ . Само вращение  $K$ , как легко видеть, имеет следующие собственные значения:  $e^{i\theta}$ ,  $e^{-i\theta}$ , 1, причем последнее  $2(n-1)$ -кратно вырождено.

Теперь рассмотрим произведение  $n$  коммутирующих плоских поворотов.  $2n$  матриц  $\Gamma_j$  разбиваются на пары, причем плоскость, натянутая на пару  $\{\Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}\}$ , поворачивается на угол  $\theta_j$ . Имеем

$$K = \prod_{j=1}^n K_j,$$

а собственные значения  $K$  равны

$$e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \dots, e^{\pm i\theta_n}.$$

Поскольку мы знаем представление каждого множителя в  $K$ , легко выписать и представление произведения

$$S(K) = \prod_{j=1}^n S(K_j) = \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{\theta_j}{2} \cdot \Gamma_{j1}\Gamma_{j2}\right).$$

В частном случае  $\Gamma_{j1} = P_j^*$ ,  $\Gamma_{j2} = Q_j^*$  имеем

$$\begin{aligned} S(K) &= \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{1}{2}\theta_j P_j^* Q_j^*\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\theta_1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\theta_1}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\theta_n}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отсюда находим собственные значения:

$$\lambda = \exp[i/2(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \dots \pm \theta_n)].$$

В общем случае произвольного выбора  $\Gamma_{j1}$ ,  $\Gamma_{j2}$ , собственные значения будут теми же, поскольку, согласно теореме, последствием преобразования эквивалентности от любого базиса  $\dots, \Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}, \dots$  можно перейти к базису  $\dots, P_j^*, Q_j^*, \dots$ . Но преобразование эквивалентности не изменяет собственных значений  $S(o)$ .

Итак, если вращение  $o$  имеет собственные значения

$$e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_n},$$

то его спинорное представление  $S(o)$  имеет собственные значения

$$\lambda = \exp[i/2(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \dots \pm \theta_n)]$$

при любом выборе координатных осей в  $2^n$ -мерном пространстве. В частности, отсюда следует, что собственные значения матрицы  $V_1 = \prod (-iK^*P_kQ_k)$  равны  $e^{\pm K^* \pm K^* \pm \dots \pm K^*}$ .

Впрочем, мы и не могли получить ничего другого. Оператор

$$V_1 = \exp\left(\sum_{k=1}^n K^* C_k\right)$$

в естественном базисе пространства  $H$  записывается как

$$V_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & \operatorname{sh} K^* \\ \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & \operatorname{sh} K^* \\ \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \end{pmatrix} \otimes \dots$$

и в каждом  $H_k$  заменой базиса приводится к виду

$$V_1 = \begin{pmatrix} e^{K^*} & 0 \\ 0 & e^{-K^*} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{K^*} & 0 \\ 0 & e^{-K^*} \end{pmatrix} \otimes \dots$$

Теперь рассмотрим  $V_2$ . Каждый из сомножителей  $V_2$ , кроме последнего, соответствует некоторому повороту. Последний сомножитель тоже был бы поворотом, если бы не  $U$ .

Легко проверить следующие свойства  $U$ :

- 1)  $U^2 = 1$ ;
- 2)  $\left[ \frac{1 \pm U}{2} \right]^2 = \frac{1 \pm U}{2}$ ;
- 3)  $(1 - U)(1 + U) = 0$ ;
- 4)  $U \cdot P_i Q_j = P_i Q_j \cdot U$  для любых  $i, j$ .

Таким образом, операторы  $\frac{1 \pm U}{2}$  можно рассматривать как проекторы, действующие на пространстве  $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n$ .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V_+ &= \left( \frac{1 + U}{2} \right) V = \left( \frac{1 + U}{2} \right) V_2 V_1, \\ V_- &= \left( \frac{1 - U}{2} \right) V = \left( \frac{1 - U}{2} \right) V_2 V_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(1 + U) \cdot V + \frac{1}{2}(1 - U) \cdot V = \\ &= \frac{1}{2}(1 + U) \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \exp(iK' P_{i+1} Q_i) \cdot \exp(-iK' P_1 Q_n) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{k=1}^n \exp(-iK^* P_k Q_k) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - U) \left\{ \prod_{i=1}^n \exp(iK' P_{i+1} Q_i) \cdot \prod_{k=1}^n \exp(-iK^* P_k Q_k) \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(1 + U) \cdot V_+ + \frac{1}{2}(1 - U) \cdot V_-. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь мы воспользовались свойствами оператора  $U$ , а также тождеством

$$\exp(-iK' P_1 Q_n U) = \operatorname{ch}(-iK' P_1 Q_n) + U \cdot \operatorname{sh}(-iK' P_1 Q_n).$$

Таким образом, мы видим, что на самом деле представление поворотов в  $2n$ -мерном пространстве осуществляет не сама матрица  $V = V_2 V_1$ , а ее проекции  $V_+$  и  $V_-$ :

$$V_+ = S(R_+), \quad V_- = S(R_-),$$

( $R_+, R_-$  — некоторые вращения  $2n$ -пространства).

Теперь нам необходимо найти собственные значения каждой из матриц  $V_+, V_-$  по отдельности. После этого мы должны будем принять во внимание наличие проекторов  $(1 \pm U)/2$  в (3.24), то есть отбросить половину спектра  $V_+$  и половину спектра  $V_-$ . Оставшиеся собственные значения и будут тогда составлять полный спектр матрицы  $V$ .

Найдем сначала собственные значения  $V_-$ . Для этого рассмотрим симметричный оператор

$$V_-^0 = V_1^{1/2} V_- V_1^{-1/2}.$$

Спектр  $V_-$  и  $V_-^0$  очевидным образом совпадает.

Используя выражения для матриц  $V_1$  и  $V_-$  в терминах  $P_k, Q_k$ ,

$$\begin{aligned} V_1 &= \prod_{j=1}^n \exp(-iK^* P_k Q_k), \\ V_- &= \prod_{j=1}^n \exp(iK' P_{j+1} Q_j) \cdot \prod_{r=1}^n \exp(-iK^* P_r Q_r), \end{aligned}$$

получаем следующее выражение для  $V_-^0$ :

$$\begin{aligned} V_-^0 &= \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{-iK^*}{2} P_j Q_j\right) \cdot \prod_{r=1}^n \exp(iK' P_{r+1} Q_r) \times \\ &\quad \times \prod_{l=1}^n \exp\left(\frac{-iK^*}{2} P_l Q_l\right) = S(R_-^0), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где  $R_-^0 = R_1 R_- R_1$  — произведение трех поворотов в  $2n$ -пространстве.

Первый и третий сомножители в (3.25) осуществляют представление  $2n$ -мерного поворота

$$R_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & i \operatorname{sh} K^* \\ -i \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \\ & & \operatorname{ch} K^* & i \operatorname{sh} K^* \\ & & -i \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

в то время как  $R_-$  дается матрицей

$$R_- = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2K' & & & & -i \operatorname{sh} 2K' \\ & \operatorname{ch} 2K' & i \operatorname{sh} 2K' & & \\ & -i \operatorname{sh} 2K' & \operatorname{ch} 2K' & & \\ & & & \operatorname{ch} 2K' & i \operatorname{sh} 2K' \\ i \operatorname{sh} 2K' & & & & \operatorname{ch} 2K' \end{pmatrix}$$

Чтобы перемножить три матрицы, заметим, что  $R_1$  и  $R_-$  можно переписать следующим образом:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad R_- = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\mathbf{B}} & 0 & 0 & \dots & \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

где элементы  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  суть матрицы размера  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & i \operatorname{sh} K^* \\ -i \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2K' & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} 2K' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i \operatorname{sh} 2K' & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \operatorname{sh} 2K' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будучи переписаны таким образом, три матрицы легко перемножаются (произведение блочных матриц находится точно так же, как произведение обычных, если рассматривать блоки как простые ма-

тричные элементы). В результате мы получаем:

$$R_-^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}^+ & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}^+ & \mathbf{a} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b} & 0 & \dots & \dots & \mathbf{b}^+ & \mathbf{a} \end{pmatrix},$$

где элементы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  — матрицы  $2 \times 2$ ,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{ch} 2K^* & i \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* \\ -i \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* & \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{ch} 2K^* \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* & -i \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{sh}^2 K^* \\ i \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{ch}^2 K^* & -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* \end{pmatrix},$$

значок «+» у  $\mathbf{b}^+$ , как обычно, означает эрмитово сопряжение.

Чтобы найти теперь собственные значения оператора  $R_-^0$ , заметим, что оба поворота  $R_1$ , и  $R_-$  (а, значит, и сам  $R_-^0$ ) коммутируют с

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $2 \times 2$ .

Следовательно, собственные векторы  $R_-^0$  следует искать среди собственных векторов матрицы  $\Omega$ .

Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что собственными векторами  $\Omega$  являются

$$\psi_k = (v, \varepsilon_k v, \varepsilon_k^2 v, \dots, \varepsilon_k^{n-1} v),$$

где  $v$  — произвольный двумерный вектор, а  $\varepsilon_k = \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ .

Подставляя эти собственные векторы в уравнение  $R_-^0 \psi = E\psi$ , приходим к выводу, что спектр оператора  $R_-^0$  есть совокупность собственных значений всех матриц

$$\alpha_{2k} = \mathbf{a} + \varepsilon_k \cdot \mathbf{b} + \varepsilon_k^{n-1} \cdot \mathbf{b}^+, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Легко найти, что детерминант  $\alpha_{2k}$  равен единице. Поэтому ее собственные значения можно записать в виде  $\exp(\pm\gamma_k)$ , где  $\gamma_k$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\alpha_{2k}) &= \frac{1}{2}(e^{\gamma_{2k}} + e^{-\gamma_{2k}}) = \operatorname{ch} \gamma_{2k} = \\ &= \operatorname{ch} 2K^* \cdot \operatorname{ch} 2K' - \operatorname{sh} 2K^* \cdot \operatorname{sh} 2K' \cdot \cos(2k\pi/n), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $0 \leq k \leq n-1$ .

Можно убедиться, что последнее уравнение имеет единственный положительный корень.

Таким образом, мы нашли собственные значения оператора  $R_-^0$ . Спектр  $V_-$  получается из него элементарно: это есть совокупность чисел

$$\exp \left[ \frac{1}{2} (\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \dots \pm \gamma_{2n-2}) \right]$$

со всевозможными комбинациями знаков.

Аналогичное вычисление для  $V_+$  приводит к следующим собственным значениям:

$$\exp \left[ \frac{1}{2} (\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \dots \pm \gamma_{2n-1}) \right],$$

где  $\gamma_i$  определяются следующим выражением

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma_{2k+1} &= \operatorname{ch} 2K^* \cdot 2K' - \operatorname{sh} 2K^* \cdot \operatorname{sh} 2K' \cdot \cos((2k+1)\pi/n), \\ 0 \leq k &\leq n-1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

При выводе последнего соотношения необходимо принять во внимание равенство нулю коммутатора операторов  $R_+$  и

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы последнего имеют вид

$$\psi_k = (v, \varepsilon_k v, \varepsilon_k^2 v, \dots, \varepsilon_k^{n-1} v),$$

где  $v$  — произвольный двумерный вектор, а  $\varepsilon_k = \exp\left(\frac{(2k+1)\pi i}{n}\right)$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ .

Уравнение (3.27), как и (3.26), имеет только один положительный корень.

Из всей совокупности собственных значений операторов  $V_-$  и  $V_+$  мы должны выкинуть половину. Именно, можно показать, что справедливо следующее утверждение: одна половина собственных значений  $V$  имеет вид  $\exp\left[\frac{1}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \dots \pm \gamma_{2n-2})\right]$ , вторая половина имеет вид  $\exp\left[\frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \dots \pm \gamma_{2n-1})\right]$ , причем комбинации знаков в каждом таком собственном значении таковы, что число минусов четно.

Таким образом, в результате всех вычислений мы можем выписать полную статсумму:

$$\begin{aligned} Z &= (2 \operatorname{sh} 2K)^{mn/2} \cdot \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^m = \\ &= (2 \operatorname{sh} 2K)^{mn/2} \cdot \left\{ \sum \exp\left[\frac{m}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \dots)\right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum \exp\left[\frac{m}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \dots)\right] \right\}. \end{aligned}$$

Суммирования здесь ведутся по всем допустимым комбинациям знаков. Более компактно последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}(2 \operatorname{sh} 2K)^{mn/2} \cdot \left\{ \prod_{l=1}^n \left( 2 \operatorname{ch} \frac{m\gamma_{2l}}{2} \right) + \prod_{l=1}^n \left( 2 \operatorname{sh} \frac{m\gamma_{2l}}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \prod_{l=1}^n \left( 2 \operatorname{ch} \frac{m\gamma_{2l-1}}{2} \right) + \prod_{l=1}^n \left( 2 \operatorname{sh} \frac{m\gamma_{2l-1}}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В пределе  $n, m \rightarrow \infty$  мы получаем:

$$Z \approx f \cdot \lambda_{\max}^m,$$

где  $f$  — степень вырождения  $\lambda_{\max}$ .

Поскольку собственные значения подразделяются на две группы

$$\begin{aligned}\ln \lambda^- &= \frac{1}{2}(\pm \gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \dots \pm \gamma_{2n-2}), \\ \ln \lambda^+ &= \frac{1}{2}(\pm \gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \dots \pm \gamma_{2n-1}),\end{aligned}$$

то кандидатами на роль наибольшего собственного значения будут

$$\lambda_{\max}^+ = \exp \left[ \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{2n-1}) \right]$$

и

$$\lambda_{\max}^- = \exp \left[ \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{2n-2}) \right].$$

Из определения  $\gamma_{2k}$  и  $\gamma_{2k-1}$  мы видим, что при больших  $n$   $\gamma_{2k} \approx \gamma_{2k-1}$ . Поэтому для достаточно низких температур ( $T < T_c$ )  $\lambda_{\max}^+ = \lambda_{\max}^-$ . Однако, с увеличением температуры ( $T > T_c$ )  $\gamma_0$  начинает вести себя совсем не так, как остальные  $\gamma_r$ : она начинает убывать, в то время как остальные возрастают. Это приводит к тому, что  $(\lambda_{\max}^-)^m$  становится пренебрежимо малой по сравнению с  $(\lambda_{\max}^+)^m$ .

Для прояснения всей картины рассмотрим случай  $K = K'$ . Тогда

$$\operatorname{ch} \gamma_k = \operatorname{ch} 2K^* \cdot \operatorname{ch} 2K - \cos(k\pi/n),$$

поскольку  $\operatorname{sh} 2K^* \operatorname{sh} 2K = 1$ .

Все  $\gamma_k$ ,  $1 \leq k \leq 2n-1$  имеют минимум в точке  $K = K_c$ , определяемой выражением

$$\operatorname{sh}^2 2K_c = 1.$$

$\gamma_0$  же меняет знак в этой точке (рис. 3.12).

Это приводит к равенству

$$\frac{\lambda_{\max}^-}{\lambda_{\max}^+} = \begin{cases} 1, & K > K_c, T < T_c, \\ e^{2(K-K^*)}, & K < K_c, T > T_c. \end{cases}$$

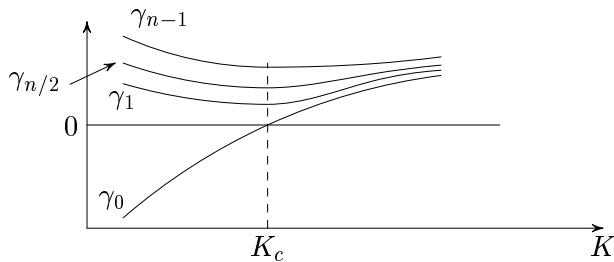


Рис. 3.12.

Таким образом, наибольшее собственное значение двукратно вырождено при  $T < T_c$  и невырождено при  $T > T_c$ . Поэтому статсумма имеет следующий вид:

$$(2 \operatorname{sh} 2K)^{-mn/2} \cdot Z = \\ = \begin{cases} 2\lambda_{\max}^m = 2 \exp\left(\frac{m}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{2n-1})\right), & T < T_c, \\ \lambda_{\max}^m = \exp\left(\frac{m}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{2n-1})\right), & T > T_c. \end{cases}$$

## Фермионы и уравнения Дирака

Величина  $\sigma_x$  называется параметром порядка, поскольку в упорядоченной фазе при температуре, ниже критической ( $T < T_c$ ), величина  $\langle \sigma_x \rangle$  отлична от нуля. Каданов ввел дуальную величину  $\mu_y$ , называемую параметром беспорядка. У этой величины ненулевое среднее появляется при температурах  $T > T_c$ .

Переменная  $\mu_y$  задается координатой центра грани исходной решетки (или узла дуальной)  $y$  и «хвостом», начинающимся в  $y$  и уходящим на бесконечность вправо (рис. 3.13).

Будем считать, что  $y$  — это координата левой нижней вершины грани, в центре которой начинается  $\mu_y$ .

На каждом ребре, которое пересекает его «хвост»,  $\mu_y$  меняет знак взаимодействия на противоположный. Условимся, что если некоторое ребро пересекается «хвостами»  $k$  раз, то взаимодействие на нем обращается тоже  $k$  раз, то есть константа взаимодействия умножается на  $(-1)^k$ .

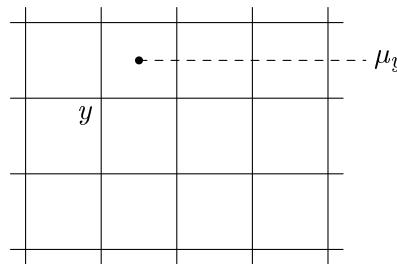


Рис. 3.13.

В общем случае среднее  $\langle \mu_{y_1} \mu_{y_2} \dots \mu_{y_N} \rangle$  определяется следующей формулой:

$$\langle \mu_{y_1} \mu_{y_2} \dots \mu_{y_N} \rangle = \frac{\tilde{Z}(y_1, y_2, \dots, y_N)}{Z},$$

где  $\tilde{Z}(y_1, y_2, \dots, y_N)$  — возмущенная статсумма.

Если же в какое-то среднее входит только одна величина  $\mu_y$ , то для его вычисления можно считать, что

$$\mu_y = \prod_{(v,w)} \exp(-2K\sigma_v\sigma_w),$$

где произведение берется по всем ребрам  $(v, w)$ , пересекаемым «хвостом».

Так введенная величина  $\mu_y$  на первый взгляд кажется нелокальной. Однако зависимость от «хвоста» слабая, и корреляционные функции  $\langle \mu_{y_1} \dots \mu_{y_n} \rangle$  оказывается однозначными функциями своих аргументов (как и  $\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \rangle$ ). Действительно, рассмотрим замкнутый путь, окружающий некоторую двумерную область. Очевидно, что статсумма системы  $Z$  не изменится, если изменить знаки взаимодействия на ребрах, которые пересекают этот путь, поскольку каждой конфигурации, дающей вклад в  $\tilde{Z}$ , соответствует некоторая конфигурация такой же энергии, дающая вклад в  $Z$ . Поэтому рассмотрение двух разных «хвостов» с началом в одном и том же узле дуальной решетки приводит к одинаковому результату (рис. 3.14).

Рассмотрим теперь средние вида

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle. \quad (3.28)$$

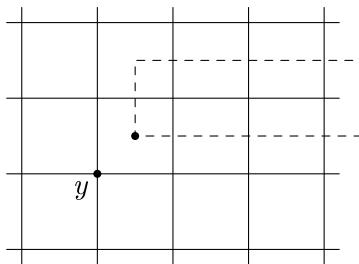


Рис. 3.14.

Величина  $\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle$  не меняется при изменении «хвостов» до тех пор, пока какой-нибудь из них не пересечет одну из вершин  $X_i$ , входящих в (3.28). В случае, когда такое пересечение имеет место, (3.28) меняет знак. Действительно, в этом случае «хвост» деформируется таким образом, что конечный «хвост» отличен от начального на замкнутый контур, охватывающий  $x_i$ . Как и раньше, замкнутый контур можно стереть, осуществляя одновременно переворот спина  $\sigma_{x_i}$ . Поэтому корреляционная функция меняет знак.

## Уравнения Дирака

На величины  $\langle \sigma_x \sigma_{x_1} \dots \rangle$ ,  $\langle \mu_y \mu_{y_1} \dots \rangle$  можно получить нелинейные уравнения, называемые уравнениями Швингера—Дайсона. Пишем по определению:

$$\langle \sigma_x \sigma_{x_1} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \sigma_{x_1} \exp \left\{ K \sum_{x,\delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta} \right\},$$

где первое суммирование ведется по всем возможным конфигурациям спинов на решетке, а второе — по всем парам ближайших соседей,  $Z$  определяется формулой

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ K \sum_{x,\delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta} \right\}.$$

Изменим теперь знаки взаимодействия на всех ребрах, соединяющих спин  $\sigma_x$  с соседями. Легко видеть, что статсумма  $Z$  при этом не

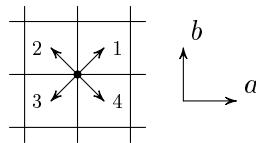


Рис. 3.15.

меняется, а корреляционная функция принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \sigma_{x_1} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \sigma_{x_1} \cdot \exp \left\{ K \sum_{x,\delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta} - 2K(\sigma_x \sigma_{x+a} + \right. \\ \left. + \sigma_x \sigma_{x-a} + \sigma_x \sigma_{x+b} + \sigma_x \sigma_{x-b}) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение

$$\exp \{-2K\sigma_x \sigma_y\} = \operatorname{ch}(2K) - \operatorname{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_y),$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle = \\ = \langle \sigma_x \sigma_y \cdot [\operatorname{ch}(2K) - \operatorname{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x+a})] \times \\ \times [\operatorname{ch}(2K) - \operatorname{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x-a})] \times \\ \times [\operatorname{ch}(2K) - \operatorname{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x+b})] \cdot [\operatorname{ch}(2K) - \operatorname{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x-b})] \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнения типа (3.29) и называются уравнениями Швингера—Дайсона. Анализ этих уравнений чрезвычайно труден ввиду их нелинейности. Мы поступим по-другому. У каждой точки  $x$  исходной решетки имеется четыре соседних с ней точки дуальной решетки:  $\vec{x}_\alpha^* = \vec{x} + \vec{e}_\alpha$ , где четыре вектора  $\vec{e}_\alpha$  имеют длину  $1/\sqrt{2}$  и направлены по диагонали к исходной решетке (рис. 3.15).

Рассмотрим объект

$$\psi_{x,\alpha} = \sigma_x \mu_{x+e_\alpha}. \quad (3.30)$$

При этом условимся располагать хвосты так, как показано на рис. 3.16.

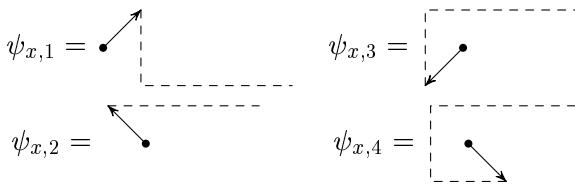


Рис. 3.16.

Рассмотрим теперь среднее

$$\langle \psi_{x_1, \alpha_1} \dots \psi_{x_n, \alpha_n} \rangle. \quad (3.31)$$

Будем предполагать, что хвосты  $\psi_{x_i, \alpha_i}$ , входящих в (3.31), располагаются согласно следующему правилу: хвост объекта  $\psi_{x_i, \alpha_i}$  проходит выше хвоста объекта  $\psi_{x_j, \alpha_j}$ , если  $\psi_{x_i, \alpha_i}$  в (3.31) стоит левее  $\psi_{x_j, \alpha_j}$ .

Из этого правила непосредственно следует равенство:

$$\langle \psi_{x_i, \alpha_i} \psi_{x_j, \alpha_j} \rangle = -\langle \psi_{x_j, \alpha_j} \psi_{x_i, \alpha_i} \rangle. \quad (3.32)$$

Имея это в виду, объекты  $\psi_{x_i, \alpha_i}$  часто называют фермионами.

Из определения  $\psi_{x,2}$  получаем тождество

$$\begin{aligned} \langle \psi_{x,2} \rangle &= \langle \sigma_x \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \exp \{-2\beta(\sigma_{x+na} \sigma_{x+na+b})\} \rangle = \\ &= \langle \sigma_x \cdot \exp \{-2K\sigma_x \sigma_{x+b}\} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \exp \{-2K(\sigma_{x+na} \sigma_{x+na+b})\} \rangle = \\ &= \langle \sigma_x \cdot [\operatorname{ch}(2K) - \operatorname{sh}(2K)\sigma_x \sigma_{x+b}] \times \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{\infty} \exp \{-2K(\sigma_{x+na} \sigma_{x+na+b})\} \rangle = \\ &= \operatorname{ch}(2K) \cdot \langle \sigma_x \mu_{x+e_1} \rangle - \operatorname{sh}(2K) \cdot \langle \sigma_{x+b} \mu_{x+b+e_4} \rangle = \\ &= \operatorname{ch}(2K) \langle \psi_{x,1} \rangle + \operatorname{sh}(2K) \langle \psi_{x+b,4} \rangle. \end{aligned}$$

Знак перед  $\operatorname{sh}(2K)$  изменен вследствие того, что при деформации хвоста  $\mu_{x+b+e_4}$ , он пересек вершину  $(x+b)$ . Аналогичным образом получаются еще три тождества такого типа. В итоге мы приходим к следующей системе линейных уравнений, которым удовлетворяют

$$\begin{aligned}
 \psi_{x,1} &= \begin{array}{c} | \\ x \end{array} \begin{array}{c} | \\ x+a \end{array} = \operatorname{ch} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x \end{array} - \operatorname{sh} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x+a \end{array} \\
 \psi_{x,2} &= \begin{array}{c} | \\ x \end{array} \begin{array}{c} | \\ x+b \end{array} = \operatorname{ch} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x \end{array} - \operatorname{sh} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x+b \end{array} \\
 \psi_{x,3} &= \begin{array}{c} | \\ x-a \end{array} \begin{array}{c} | \\ x \end{array} = \operatorname{ch} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x \end{array} - \operatorname{sh} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x-a \end{array} \\
 \psi_{x,4} &= \begin{array}{c} | \\ x-b \end{array} \begin{array}{c} | \\ x \end{array} = \operatorname{ch} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x \end{array} - \operatorname{sh} 2K \cdot \begin{array}{c} | \\ x-b \end{array}
 \end{aligned}$$

Рис. 3.17.

фермионы (см. также рис. 3.17):

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{x,1} - s\psi_{x+a,3} + c\psi_{x,4} = 0, \\ c\psi_{x,1} - \psi_{x,2} + s\psi_{x+b,4} = 0, \\ s\psi_{x-a,1} - c\psi_{x,2} + \psi_{x,3} = 0, \\ s\psi_{x-b,1} - c\psi_{x,3} + \psi_{x,4} = 0, \end{array} \right. \quad (3.33)$$

где  $c = \operatorname{ch}(2K)$ ,  $s = \operatorname{sh}(2K)$ , а  $a$  и  $b$  — векторы элементарных периодов решетки:

$$a = (\varepsilon, 0), \quad b = (0, \varepsilon).$$

Ищем решение (3.33) в виде

$$\psi_{\vec{x},\alpha} = \sum_{\vec{p}} c_{\vec{p},\alpha} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad (3.34)$$

где  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ .

Подставляя (3.34) в (3.33) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях, получим систему

$$D_{\alpha\beta} c_{\vec{p},\beta} = 0, \quad (3.35)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -se^{i\vec{p}\vec{a}} & c \\ c & -1 & 0 & se^{i\vec{p}\vec{b}} \\ se^{-i\vec{p}\vec{a}} & -c & 1 & 0 \\ 0 & se^{-i\vec{p}\vec{b}} & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие существования ненулевого решения (3.35):

$$\det D = 0.$$

Вычисляя детерминант  $D$ , получаем:

$$\det D = 2c^2[c^2 - 2s + s(2 - \cos(p_1\varepsilon) - \cos(p_2\varepsilon))] = 0,$$

откуда

$$\cos(\varepsilon p_1) + \cos(\varepsilon p_2) = \frac{c^2}{s} = \frac{1+s^2}{s} = s + \frac{1}{s}.$$

Введем следующую параметризацию:

$$\operatorname{ch}^2(K) = \frac{1}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh}^2(K) = \frac{t^2}{1-t^2}.$$

Тогда

$$c = \frac{e^{2K} + e^{-2K}}{2} = \operatorname{ch}^2(K) + \operatorname{sh}^2(K) = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$s = \frac{e^{2K} - e^{-2K}}{2} = 2 \operatorname{ch}(K) \operatorname{sh}(2K) = \frac{2t}{1-t^2},$$

откуда следует, что

$$c^2 - 2s = \frac{(t^2 + 2t - 1)^2 + 4t^2}{(1-t^2)^2} \geq 0.$$

Таким образом, мы видим, что одна или обе компоненты вектора  $\vec{p}$  должны быть мнимыми.

В критической точке импульсы  $p_1$  и  $p_2$  обращаются в нуль. Поэтому  $T_c$  определяется из условия

$$c^2 - 2s = 0,$$

откуда следует, что в критической точке

$$\operatorname{sh}(2K_c) = 1, \quad \operatorname{ch}(2K_c) = \sqrt{2}.$$

Найдем слабо меняющееся по  $x$  решение в окрестности критической температуры. Введем параметр  $m$  и, считая  $\varepsilon \ll 1$ , запишем с точностью до бесконечномальных второго порядка по  $\varepsilon$

$$c \approx \sqrt{2} + \frac{\varepsilon m}{2}, \quad s \approx 1 + \frac{m\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Разложив  $s$  и  $c$  в окрестности критической температуры и сделав в (3.33) замену

$$\begin{cases} \psi_{x+a,\alpha} = \psi_{x,\alpha} + \varepsilon \partial_1 \psi_{x,\alpha}, \\ \psi_{x+b,\alpha} = \psi_{x,\alpha} + \varepsilon \partial_2 \psi_{x,\alpha}, \end{cases}$$

получим систему:

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_1 \psi_1 = \frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}} \psi_1 - \frac{\varepsilon m}{2} \psi_2 + \psi_1 - \sqrt{2} \psi_2 + \psi_3, \\ \varepsilon \partial_1 \psi_3 = -\frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}} \psi_3 + \frac{\varepsilon m}{2} \psi_4 + \psi_1 + \sqrt{2} \psi_4 - \psi_3, \\ \varepsilon \partial_2 \psi_2 = \frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}} \psi_2 - \frac{\varepsilon m}{2} \psi_3 + \psi_2 - \sqrt{2} \psi_3 + \psi_4, \\ \varepsilon \partial_2 \psi_4 = -\frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}} \psi_4 - \frac{\varepsilon m}{2} \psi_1 + \psi_2 - \sqrt{2} \psi_1 - \psi_4. \end{cases} \quad (3.36)$$

Объединив четыре вещественных функции в две комплексные

$$\chi_1 = \psi_1 + i\psi_3, \quad \chi_2 = \psi_2 + i\psi_4,$$

получаем два комплексных уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_1 \chi_1 = \frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}} \bar{\chi}_1 - \frac{\varepsilon m}{2} \bar{\chi}_2 + (1+i) \bar{\chi}_1 - \sqrt{2} \bar{\chi}_2, \\ \varepsilon \partial_2 \chi_2 = \frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}} \bar{\chi}_2 - i \frac{\varepsilon m}{2} \bar{\chi}_1 + (1+i) \bar{\chi}_2 - i \sqrt{2} \bar{\chi}_1. \end{cases} \quad (3.37)$$

Сделаем теперь в (3.37) следующую замену переменных:

$$\chi_1 = e^{i\pi/4} \left( \theta_1 + \frac{\varepsilon m}{4\sqrt{2}} \bar{\theta}_2 \right), \quad \chi_2 = e^{-i\pi/4} \left( \theta_1 - \frac{\varepsilon m}{4\sqrt{2}} \bar{\theta}_2 \right).$$

Члены нулевого порядка по  $\varepsilon$  в правой части уравнений (3.37) сокращаются, вторым и всеми дальнейшими порядками по  $\varepsilon$  мы пренебрегаем и поэтому получаем, что функции  $\theta_i$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\partial_1 \theta_1 &= \left( e^{-i\pi/4} \frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{m}{2} \right) \bar{\theta}_1 + \frac{m}{2} \theta_2, \\ \partial_2 \theta_1 &= \left( e^{i\pi/4} \frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{im}{2} \right) \bar{\theta}_1 - \frac{im}{2} \theta_2.\end{aligned}$$

Положив  $\partial = \partial_1 - i\partial_2$ ,  $\bar{\partial} = \partial_1 + i\partial_2$ , приходим к системе

$$\begin{aligned}\bar{\partial} \theta_1 &= m \theta_2, \\ \partial \theta_1 &= -im \bar{\theta}_1,\end{aligned}$$

или, дифференцируя еще раз,

$$\begin{aligned}\partial \bar{\partial} &= m \partial \theta_2, \\ \bar{\partial} \partial \theta_1 &= -im \bar{\partial} \bar{\theta}_1.\end{aligned}$$

Следовательно,  $\partial \theta_1 = -i\bar{\partial} \bar{\theta}_2$ , и мы получаем, что  $\theta_i$  удовлетворяют двухкомпонентным уравнениям Дирака

$$\partial \theta_2 = m \theta_1, \quad \bar{\partial} \theta_1 = m \theta_2,$$

а параметр  $m$  играет роль массы частицы, описываемой этими уравнениями.

### 3. Вершинные модели

#### Модель Изинга как вершинная модель

Следующий способ представления трансфер-матрицы и, следовательно, вычисления статистической суммы будет основан на трактовке модели Изинга как вершинной модели. При этом подходе основной механизм вычисления статсуммы связан с существованием большого количества коммутирующих с трансфер-матрицей операторов, то есть интегралов движения. Метод нахождения этих интегралов движения, которым мы воспользуемся, был предложен Бакстером.

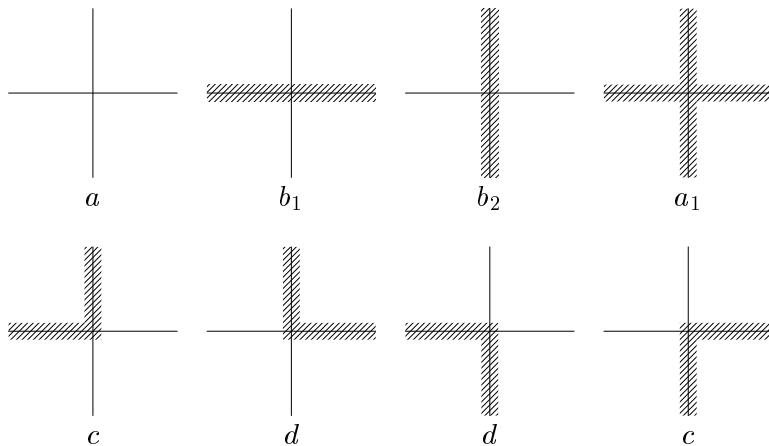


Рис. 3.18.

Рассмотрим модель Изинга на решетке  $n \times m$  с тороидальными граничными условиями. Здесь  $n$  — число узлов в строке, а  $m$  — число узлов в столбце. Введем анизотропию, то есть будем считать, что горизонтальная и вертикальная константы взаимодействия различны:  $K_{\text{hor}} = K_1$ ,  $K_{\text{vert}} = K_2$ .

Ранее было введено низкотемпературное разложение для изотропной модели Изинга. Абсолютно аналогично можно вывести формулу для низкотемпературного разложения статсуммы и в анизотропном случае. Она имеет следующий вид:

$$Z \sim \sum_C \exp \{-2K_1\Delta_1 - 2K_2\Delta_2\}, \quad (3.38)$$

где суммирование выполняется по всевозможным замкнутым контурам на дуальной решетке, а  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  — число горизонтальных и вертикальных линий соответственно.

Каждому контуру на дуальной решетке поставим в соответствие совокупность состояний ребер всей решетки: если контур не проходит по данному ребру, будем закрашивать его в белый цвет, если же проходит, то черным. Белым ребрам сопоставим знак «плюс», черным — «минус».

Очевидно, что к каждому узлу подходит четное число плюсов и четное число минусов. Поэтому возможен не всякий вариант вершины, а только представленные на рис. 3.18.

Сделаем теперь следующий шаг и для каждой конфигурации ребер ее вклад в статсумму представим в виде произведения некоторых чисел, расположенных в узлах решетки, называемых *локальными вершинными весами* и зависящих только от состояний четырех ребер, входящих в узел. Для этого заметим, что в зависимости от состояния ребра, его вклад в статсумму (локальный вес ребра) может быть одним из изображенных на рис. 3.19.

Локальный вес вершины равен, по определению, корню из произведения локальных весов ребер, входящих в нее. Тогда для вершин на рис. 3.18:

$$\begin{aligned} a &= 1, & a_1 &= e^{-2K_1-2K_2}, & b_1 &= e^{-2K_1}, \\ b_2 &= e^{-2K_2}, & c &= e^{-K_1-K_2}, & d &= e^{-K_1-K_2}. \end{aligned}$$

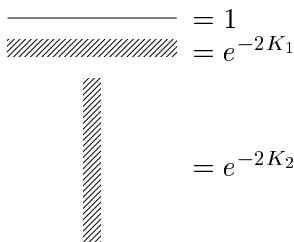


Рис. 3.19.

Из локальных вершинных весов можно составить матрицу  $4 \times 4$ , элементы которой маркируются состояниями четырех ребер, входящих в вершину.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} R_{++}^{++} &= a, & R_{--}^{--} &= a_1, \\ R_{+-}^{+-} &= b_1, & R_{-+}^{-+} &= b_2, \\ R_{+-}^{-+} &= R_{-+}^{+-} = c, & R_{++}^{--} &= R_{--}^{++} = d. \end{aligned}$$

При повороте вершины с входящими в нее ребрами как целого на 90 градусов, как легко видеть, вес изменяется. Поэтому удобно ввести ориентацию вершины. На рисунках она изображается уголком (рис. 3.20).

Тогда статистический вес всей конфигурации можно представить в виде

$$\frac{\beta}{\mu} \quad \nu \quad \alpha = R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} \quad \prod_x R_{\alpha_x \mu_x}^{\beta_x \nu_x},$$

откуда статсумма:

Рис. 3.20.

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\alpha_x, \beta_x, \mu_x, \nu_x} \prod_x R_{\alpha_x \mu_x}^{\beta_x \nu_x}, \quad (3.39)$$



Рис. 3.21.

где суммирование ведется по всевозможным конфигурациям ребер, а под знаком произведения стоят локальные вершинные веса.

Все это позволяет сформулировать понятие *вершинной модели*.

**Определение.** Рассмотрим решетку  $n \times m$ , где  $n$  — число узлов в строке, а  $m$  — число узлов в столбце (предполагаются тороидальные граничные условия). Будем приписывать состояния  $\pm 1$  не узлам, а ребрам решетки и обозначать эти переменные греческими буквами  $\alpha, \beta, \mu, \nu$ . Это означает, что любое ребро окрашено либо в черный цвет (состояние  $-1$ ), либо в белый (состояние  $+1$ ). Для каждого узла решетки возможны, вообще говоря, 16 различных состояний четырех ребер, входящих в этот узел (см. рис. 3.21).

С каждым узлом  $x$  и состояниями  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  ее ребер связан вершинный вес  $R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu)$  (рис. 3.20).

Число ненулевых чисел среди  $R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu)$  обычно фигурирует в названиях: 8-ми вершинная модель или 6-ти вершинная модель. Статсумма вершинной модели определяется как

$$Z = \sum_{\{\alpha\}} \left( \prod_x R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu) \right), \quad (3.40)$$

где суммирование производится по всем конфигурациям ребер  $\{\alpha\}$ , а произведение берется по всем узлам  $x$ .

Следующий шаг является решающим для судьбы вершинных моделей. Рассмотрим две соседние вершины  $x_1$  и  $x_2$ , например, как на рис. 3.22. В сумме (3.40) им соответствуют слагаемые

$$Z = \dots \sum_{\nu} \prod \dots R_{x_1}(\alpha_1 \beta_1 \mu \nu) R_{x_2}(\alpha_2 \beta_2 \nu \lambda) \dots$$

Такое произведение напоминает произведение матриц и позволяет надеяться на построение трансфер-матрицы.

Определим  $4 \times 4$  матрицу  $R$ , элементы которой нумеруются состояниями ребер  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  и равны весы вершины при заданном состоянии

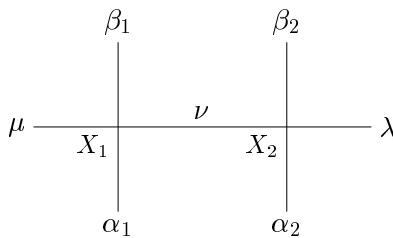


Рис. 3.22.

ребер, входящих в нее, то есть

$$R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} = R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(x) = R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu).$$

Матрицу  $R$  можно рассматривать как матрицу линейного преобразования  $R$  из тензорного произведения двух двумерных пространств в тензорное произведение двух таких же пространств:

$$R : H(\alpha) \otimes H(\mu) \rightarrow H(\beta) \otimes H(\nu),$$

где  $H(\dots) = \mathbf{C}^2$  — конфигурационное пространство, отвечающее одному ребру. В скобках указаны переменные, значения которых задают стандартный базис в пространствах  $H$ . Его мы будем обозначать, как и раньше,  $\{\uparrow, \downarrow\}$  или  $\{1, -1\}$  или  $\{+, -\}$ . Все вышесказанное можно изобразить графически (рис. 3.20).

Статсумма вершинной модели равна

$$Z = \sum_{\{\alpha\}} W(\{\alpha\}),$$

где  $W(\{\alpha\}) = \prod_x R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}$  — вес конфигурации ребер  $\{\alpha\}$ .

Теперь можно определить трансфер-матрицу  $T = T_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$  как матрицу оператора

$$T : H(\alpha_1) \otimes \dots \otimes H(\alpha_n) \rightarrow H(\beta_1) \otimes \dots \otimes H(\beta_n).$$

Элемент матрицы  $T$  равен (рис. 3.23)

$$T_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} = \sum_{\vec{\nu}} \prod R_{\alpha_1 \nu_1}^{\beta_1 \nu_2} R_{\alpha_2 \nu_2}^{\beta_2 \nu_3} \dots R_{\alpha_n \nu_n}^{\beta_n \nu_1}.$$

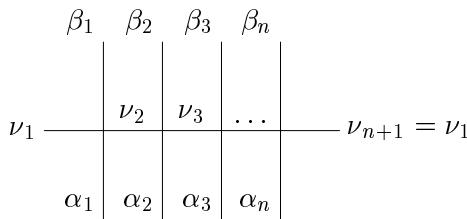


Рис. 3.23.

Тогда

$$Z = \text{Tr } T^m,$$

и вычисление статсуммы свелось к задаче на нахождение собственных значений оператора  $T$ :

$$T\psi_i = \Lambda_i \psi_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{2^n} \Lambda_i^m.$$

Выпишем матрицу оператора  $R$  в базисе  $v_i \otimes v_j = \{+, \otimes +, -, \otimes +, + \otimes -, - \otimes -\}$ :

$$R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-K_1-K_2} \\ 0 & e^{-2K_1} & e^{-K_1-K_2} & 0 \\ 0 & e^{-K_1-K_2} & e^{-2K_2} & 0 \\ e^{-K_1-K_2} & 0 & 0 & e^{-2K_1-2K_2} \end{pmatrix}$$

Вес конфигурации равен произведению весов всех ребер:

$$\prod_x R(x). \quad (3.41)$$

Таким образом, модель Изинга является восьмивершинной моделью.

### Квадрат модели Изинга как вершинная модель

Раскрасим поля решетки в шахматном порядке. Будем считать, что наша система распалась на две подрешетки — черную и белую. В центрах черных полей поместим частицы со спинами  $\sigma'_i$ , а в центрах белых полей — частицы со спинами  $\sigma_i$ . При этом  $\sigma_i$  взаимодействуют между собой по диагонали, аналогично ведут себя и  $\sigma'_i$ .

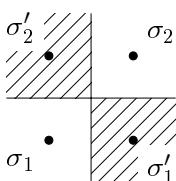


Рис. 3.24.

Определим теперь вершинный вес. Каждый узел  $x$  окружен двумя черными и двумя белыми полями (рис. 3.24). Тогда

$$V_x = V(\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2) = e^{K_1 \sigma'_1 \sigma'_2 + K_2 \sigma_1 \sigma_2},$$

так что

$$Z_{\text{Ising}}^2 = \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \prod V_x.$$

Вес вершины можно выразить через переменные на ребрах (рис. 3.25):

$$\mu = \sigma_1 \sigma'_2; \quad \nu = \sigma_2 \sigma'_1; \quad \alpha = \sigma_1 \sigma'_1; \quad \beta = \sigma_2 \sigma'_2. \quad (3.42)$$

Откуда

$$\sigma_2 = (\mu \beta) \sigma_1; \quad \sigma_2 = (\nu \alpha) \sigma_1; \quad \sigma'_2 = (\mu \alpha) \sigma'_1; \quad \sigma'_2 = (\nu \beta) \sigma'_1.$$

Для совместности системы необходимо, чтобы было

$$\alpha \beta \mu \nu = 1. \quad (3.43)$$

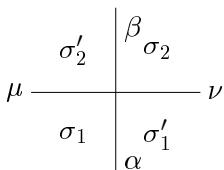


Рис. 3.25.

Наоборот, пусть переменные  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  удовлетворяют условию  $\alpha \beta \mu \nu = 1$ . Тогда если задать спин на какой-то одной (произвольной) грани и значения переменных на ребрах, то при помощи соотношений (3.42) все остальные спины определяются однозначно.

Таким образом, любому состоянию спинов на гранях соответствует одна конфигурация переменных на ребрах, в то время как каждой конфигурации  $\{\alpha, \beta, \mu, \nu\}$  соответствуют два различных состояния граней, отличающиеся друг от друга переворотом всех спинов.

Локальные вершинные веса для такой модели приведены на рис. 3.26.

## Модель льда на квадратной решетке

Рассмотрим модель на квадратной решетке, в которой переменные на ребрах принимают два значения (+1 и -1), а ненулевыми являются

$\begin{array}{c} + \\   \\ + \end{array}$	$= e^{K_1+K_2} = a$	$\begin{array}{c} - \\   \\ + \end{array}$	$= e^{-K_1+K_2} = c$
$\begin{array}{c} + \\   \\ - \end{array}$	$= e^{-K_1+K_2} = c$	$\begin{array}{c} - \\   \\ + \end{array}$	$= e^{-K_1-K_2} = b$
$\begin{array}{c} - \\   \\ - \end{array}$	$= e^{K_1-K_2} = d$	$\begin{array}{c} - \\   \\ + \end{array}$	$= e^{-K_1-K_2} = b$
$\begin{array}{c} - \\   \\ + \end{array}$	$= e^{-K_1-K_2} = d$	$\begin{array}{c} - \\   \\ - \end{array}$	$= e^{K_1+K_2} = d$

Рис. 3.26.

только шесть или восемь состояний вершин (вершинных весов). Значения вершинных весов обычно обозначаются  $a, b, c, d$  (см. рис. 3.27).

Мотивацией названия данной модели является представление модели как модели несуществующего в природе объекта — двумерного льда.

Рассмотрим квадратную решетку (см. рис. 3.28), в вершинах которой находятся атомы кислорода. Водород находится на ребрах, но не в центре ребра, а вблизи одного из двух атомов кислорода. Стрелки

$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} + \\   \\ + \end{array} = \begin{array}{c} + \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} + \\   \\ - \end{array} = \begin{array}{c} - \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}$
$R_{++}^{++} = R_{--}^{--} = a$	$R_{+-}^{+-} = R_{+-}^{-+} = c$
$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} - \\   \\ + \end{array} = \begin{array}{c} - \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} + \\   \\ - \end{array} = \begin{array}{c} + \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}$
$R_{-+}^{-+} = R_{+-}^{+-} = b$	$R_{++}^{--} = R_{--}^{++} = d$

Рис. 3.27.

на рис. 3.29 указывают направление смещения атомов водорода. На рис. 3.29 показано, кроме того, соответствие между расположениями атомов водорода и состояниями модели (одна из конфигураций). Состояния с  $d \neq 0$  запрещены — валентность кислорода в них оказывается равной 0 или 4.

Так определенная модель называется *шестивершинной моделью*, или *моделью льда*.

Если же вершинный вес  $d \neq 0$ , то модель носит название *восьмивершинной*.

В базисе  $v_i \otimes v_j = \{+ \otimes +, - \otimes +, + \otimes -, - \otimes -\}$   $R$ -матрица восьмивершинной модели имеет вид:

$$R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

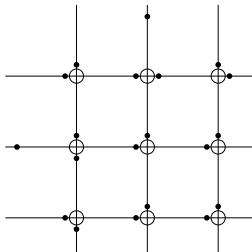


Рис. 3.28.

Обобщением предыдущих рассмотрений являются вершинные модели, в которых  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  принимают  $n$  разных значений, а статистика вычисляется аналогичным образом.

## Вершинные модели. Уравнения Янга–Бакстера

Рассмотрим вершинную модель общего вида. Введем для нее трансфер-матрицу  $T$  (рис. 3.23):

$$T_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} = T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_n} = R_{\alpha_1 \nu_1}^{\beta_1 \nu_2} R_{\alpha_2 \nu_2}^{\beta_2 \nu_3} \dots R_{\alpha_n \nu_n}^{\beta_n \nu_1}. \quad (3.44)$$

Здесь по повторяющимся индексам (в данном случае это  $\nu_i$ ) производится суммирование. Как всегда, наша задача состоит в том, чтобы найти собственные векторы и собственные значения трансфер-матрицы.

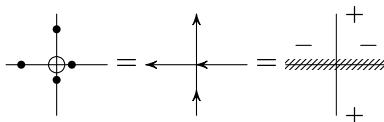


Рис. 3.29.

	$\beta_1$		$\beta_2$		$\beta_n$	
$\mu_1$		$\mu_2$		$\dots$		$\mu_{n+1} = \mu_1$
	$\alpha_1$		$\alpha_2$		$\alpha_n$	

Рис. 3.30.

Попытаемся найти семейство матриц  $\tilde{T}$ , коммутирующих с нашей трансфер-матрицей.

Будем искать  $\tilde{T}$  в локальном виде, аналогичном виду  $T$  (рис. 3.30):

$$\tilde{T}_{\alpha}^{\beta} = \tilde{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_n} = \tilde{R}_{\alpha_1 \mu_1}^{\beta_1 \mu_2} \tilde{R}_{\alpha_2 \mu_2}^{\beta_2 \mu_3} \dots \tilde{R}_{\alpha_n \mu_n}^{\beta_n \mu_1}.$$

Оператор  $T\tilde{T}$ , как и оператор  $\tilde{T}T$ , можно изобразить графически (рис. 3.31).

Удобно ввести матрицы  $S_{\alpha}^{\beta}$  и  $\tilde{S}_{\alpha}^{\beta}$ , определяемые через матричные элементы (рис. 3.32):

$$(S_{\alpha}^{\beta})_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} = \tilde{R}_{\alpha \mu_1}^{\gamma \nu_1} R_{\gamma \mu_2}^{\beta \nu_2}, \quad (\tilde{S}_{\alpha}^{\beta})_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} = R_{\alpha \mu_1}^{\gamma \nu_1} \tilde{R}_{\gamma \mu_2}^{\beta \nu_2}.$$

Тогда матрицы  $T\tilde{T}$ ,  $\tilde{T}T$  запишутся следующим образом:

$$T\tilde{T} = \text{Tr } S_{\alpha_1}^{\beta_1} S_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots S_{\alpha_n}^{\beta_n}, \quad \tilde{T}T = \text{Tr } \tilde{S}_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{S}_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots \tilde{S}_{\alpha_n}^{\beta_n}.$$

Идея Бакстера состоит в том, что условие  $T\tilde{T} = \tilde{T}T$  будет выполнено, если существует матрица  $M$ , такая что для любых  $\alpha, \beta$

$$S_{\alpha}^{\beta} = M \tilde{S}_{\alpha}^{\beta} M^{-1},$$

или, что то же самое,

$$M \tilde{S}_{\alpha}^{\beta} = S_{\alpha}^{\beta} M.$$

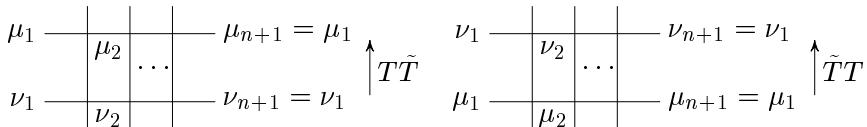


Рис. 3.31.

$$(S_\alpha^\beta)_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} = \begin{array}{c} \beta \\ | \\ \mu_2 - \gamma - \nu_2 \\ | \\ \gamma \\ | \\ \mu_1 - \alpha - \nu_1 \end{array}$$

$$(\tilde{S}_\alpha^\beta)_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} = \begin{array}{c} \beta \\ | \\ \mu_2 - \gamma - \nu_2 \\ | \\ \gamma \\ | \\ \mu_1 - \alpha - \nu_1 \end{array}$$

Рис. 3.32.

$$\begin{array}{ccc} \beta & & \beta \\ | & & | \\ \mu_2 & - & \lambda_2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \gamma & \\ & | & \\ & \mu_1 & \end{array} = \begin{array}{ccc} \mu_2 & & \lambda_1 \\ | & & | \\ \mu_1 & - & \lambda_2 \\ & \diagup & \diagdown \\ & \gamma & \\ & | & \\ & \alpha & \end{array}$$

Рис. 3.33.

Это равенство можно переписать в виде

$$\tilde{R}_{\gamma \mu_2}^{\beta \lambda_2} R_{\alpha \mu_1}^{\gamma \lambda_1} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\mu_1 \mu_2} = M_{\mu_1 \mu_2}^{\lambda_1 \lambda_2} R_{\gamma \lambda_1}^{\beta \nu_1} \tilde{R}_{\alpha \lambda_2}^{\gamma \nu_2}. \quad (3.45)$$

Уравнения (3.45) называются *уравнениями Янга–Бакстера* (*YB*) или *уравнениями треугольника*. Графически их изображают как на рис. 3.33.

В системе (3.45) число уравнений определяется числом способов расстановки + и – на внешних концах. Получается система из 64 уравнений с 16 неизвестными. Неизвестными являются элементы матрицы  $M$ .

**Замечание.** Часто приходится рассматривать тензорное произведение вида  $H_{j_1} \otimes H_{j_2} \otimes \dots \otimes H_{j_n}$  нескольких копий пространства  $H = (\mathbf{C})^2$ , упорядоченных каким–то образом. В этом случае удобно обозначать через  $R_{jk}$  ( $j \neq k$ ) оператор, действующий на  $H_j$  и  $H_k$  как  $R$ , а на других пространствах — как тождественное отображение. Например, на произведении  $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$  имеем

$$R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes \text{id}, \quad R^{23} = \sum_i \text{id} \otimes a_i \otimes b_i,$$

если  $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ , где  $a_i, b_i \in \text{End}(V)$ . Тогда уравнения Янга–Бакстера можно переписать как

$$R^{23} \tilde{R}^{13} M^{12} = M^{12} \tilde{R}^{13} R^{23}. \quad (3.46)$$

Действительно, отождествив, во-первых, пространства  $H(\alpha), H(\beta), H(\gamma)$ , во-вторых, пространства  $H(\mu_1), H(\nu_1), H(\lambda_1)$ , и, в-третьих, пространства  $H(\mu_2), H(\nu_2), H(\lambda_2)$  (то есть считая, что все пространства, отвечающие одной прямой, тождественны) мы получим (3.46).

## Уравнения Янга–Бакстера для модели льда

Большая часть дальнейшего материала так или иначе связана с уравнениями Янга–Бакстера. Поэтому разберем очень важный пример — модель льда. Напомним, что в этой модели только шесть элементов  $R$ -матрицы отличны от нуля. Эти коэффициенты попарно равны и обозначаются  $a, b, c$ .

Предположим, что матрицы  $R, \tilde{R}$  и  $M = \hat{R}$  имеют одинаковый вид, но соответствуют разным значениям параметров:

$$R \rightarrow a, b, c; \quad \tilde{R} \rightarrow a', b', c'; \quad \hat{R} \rightarrow a'', b'', c''.$$

Если числа  $a, b, c$  заданы, то  $a', b', c'$  и  $a'', b'', c''$  находятся в нашем распоряжении. Поскольку уравнения однородны относительно  $R, \tilde{R}$  и  $\hat{R}$ , то остается только четыре параметра, подлежащих определению.

К счастью, возникает много упрощений. Во-первых, нетрудно заметить, что  $R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} \neq 0$ , только если выполняется условие  $\alpha + \mu = \beta + \nu$ . То же самое справедливо по отношению к  $\tilde{R}$  и  $\hat{R}$ . Отсюда следует, что обе части уравнения Янга–Бакстера равны нулю, если не выполняется условие  $\alpha + \mu_1 + \mu_2 = \beta + \nu_1 + \nu_2$ . В результате остается только 20 уравнений. Кроме того, обращение знаков всех спинов не меняет  $R, \tilde{R}, \hat{R}$  и уравнения YB. Поэтому эти 20 уравнений сводятся к 10 уравнениям.

Выписав эти десять уравнений, легко увидеть, что на самом деле четыре из них выполняются тождественно, а остальные образуют три пары эквивалентных уравнений.

Таким образом, в системе YB останется только три уравнения. Первое из них имеет вид

$$ac'a'' = bc'b'' + ca'c''$$

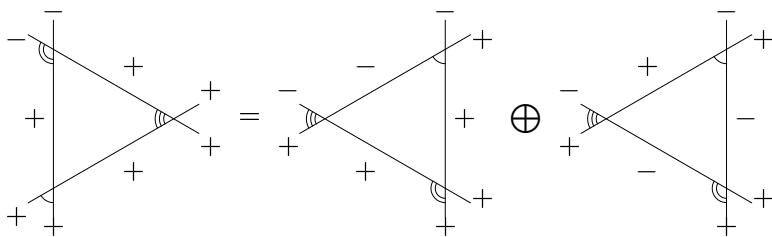


Рис. 3.34.

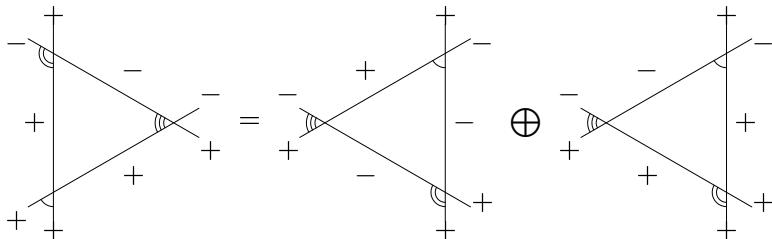


Рис. 3.35.

и соответствует расстановке + и −, показанной на рис. 3.34.

Второе уравнение YB имеет вид

$$ab'c'' = cc'b'' + ba'c''$$

и соответствует рис 3.35.

Третье уравнение имеет вид

$$cb'a'' = ca'b'' + bc'c''$$

и соответствует рис. 3.36.

Рассмотрим эти три уравнения как систему однородных линейных уравнений с неизвестными  $a'', b'', c''$ . Собственно говоря, нам не нужно находить матрицу оператора  $\hat{R}=M$ . Важно только знать, что такая существует.

Выпишем еще раз систему уравнений Янга–Бакстера:

$$\begin{cases} ac'a'' = bc'b'' + ca'c'', \\ ab'c'' = cc'b'' + ba'c'', \\ cb'a'' = ca'b'' + bc'c''. \end{cases} \quad (3.47)$$

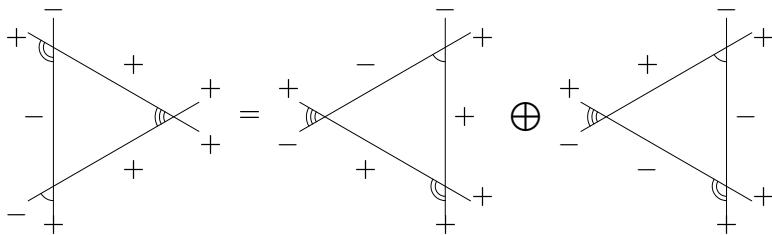


Рис. 3.36.

Ненулевое решение (3.47) существует, если определитель системы обращается в нуль. Это условие эквивалентно равенству

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \frac{(a')^2 + (b')^2 - (c')^2}{a'b'}. \quad (3.48)$$

Рассматривая систему (3.47) как систему уравнений с неизвестными  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , получаем аналогичное условие:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \frac{(a'')^2 + (b'')^2 - (c'')^2}{a''b''}. \quad (3.49)$$

Обозначим через  $\Delta(a, b, c)$  величину  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$ . Тогда из (3.48) и (3.49) видно, что все наборы ненулевых троек  $a, b, c$  с фиксированным  $\Delta$ , удовлетворяющих (3.47), лежат на конусе

$$x^2 + y^2 - z^2 = \Delta \cdot xy.$$

Оказывается очень удобным выбрать на этом конусе такую параметризацию  $\{\rho, u, \eta\}$ , чтобы  $\Delta$  не зависела от  $\rho$  и  $u$ :

$$\begin{cases} a = \rho \operatorname{sh}(\eta + u), \\ b = \rho \operatorname{sh} u, c = \rho \operatorname{sh} \eta. \end{cases} \quad (3.50)$$

Тогда, как легко видеть,  $\Delta = 2 \operatorname{ch} \eta$ .

Параметр  $u$  называется *спектральным параметром*. Наличие нетривиального решения уравнений Янга–Бакстера означает коммутативность матриц  $T$  и  $\tilde{T}$ . Отсюда мы делаем вывод, что эти две матрицы коммутируют тогда и только тогда, когда тройки  $\{a, b, c\}$  и

$\{a', b', c'\}$ , соответствующие им, характеризуются одним и тем же значением параметра  $\eta$  (спектральный же параметр  $u$  и нормировочный  $\rho$  могут быть разными):

$$\begin{aligned} a &= \rho \operatorname{sh}(\eta + u), & a' &= \rho' \operatorname{sh}(\eta + u'), \\ b &= \rho \operatorname{sh} u, & b' &= \rho' \operatorname{sh} u', \\ c &= \rho \operatorname{sh} \eta, & c' &= \rho' \operatorname{sh} \eta. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Кроме того, как видно из (3.49), тройку  $\{a'', b'', c''\}$  можно запареметризовать аналогичным образом:

$$\begin{cases} a'' = \rho'' \operatorname{sh}(\eta + u''), \\ b'' = \rho'' \operatorname{sh} u'', \\ c'' = \rho'' \operatorname{sh} \eta. \end{cases} \quad (3.52)$$

Возникает вопрос: как связаны между собой спектральные параметры  $u, u', u''$  матриц  $R, \tilde{R}, \hat{R}$ ?

Подставляя выражения (3.51) и (3.52) в первое из уравнений (3.47), приведем его к виду

$$\operatorname{sh}(u + u' + \eta) = \operatorname{sh}(u' + \eta). \quad (3.53)$$

Второе уравнение записывается в виде

$$\operatorname{sh}(u' - u) = \operatorname{sh} u'', \quad (3.54)$$

а третье

$$\operatorname{sh}(u' - u'') = \operatorname{sh} u. \quad (3.55)$$

Общее решение уравнений (3.53), (3.54) и (3.55) таково:

$$u' = u + u'' + 2\pi ik, \quad (3.56)$$

где  $k$  — любое целое число. Но увеличение переменной  $u'$  на  $2\pi ik$  не влияет на  $a, b, c$ ; поэтому без потери общности можно принять

$$u' = u + u''. \quad (3.57)$$

Таким образом, уравнения Янга—Бакстера принимают вид:

$$R^{12}(u)R^{13}(u')R^{23}(u' - u) = R^{23}(u' - u)R^{13}(u')R^{12}(u).$$

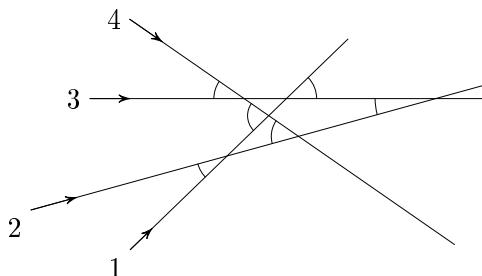


Рис. 3.37.

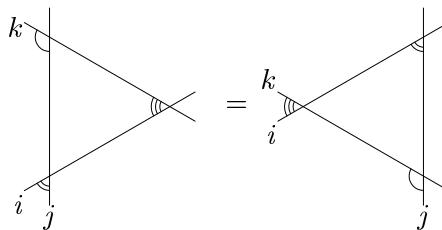


Рис. 3.38.

Если теперь рассмотреть нерегулярную решетку, образованную пересечением  $L$  прямых (рис. 3.37), то для такой решетки тоже можно определить вершинную модель. Пусть на ребрах решетки расположены спины  $\alpha = 1, \dots, N$ . Занумеруем прямые и каждому пересечению сопоставим параметр  $u^{ij}$  и матрицу взаимодействия  $R^{ij}(u^{ij})$ . Будем считать, что матрицы  $R^{ij}$  удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера:

$$R^{ij} R^{kj} R^{ki} = R^{ki} R^{kj} R^{ij},$$

что также можно изобразить графически (рис. 3.38).

Оказывается, что статсумма такой модели  $Z$ -инвариантна, то есть не меняется при протаскивании прямых друг через друга (рис. 3.39).

Польза такой неоднородной модели была отмечена Бакстером, поскольку роль уравнения Янга–Бакстера становится особенно ясной в  $Z$ -инвариантной модели.

Подведем итог. Мы получили семейство коммутирующих между собой трансфер-матриц  $T(u)$ . У этого семейства имеется общая система собственных векторов. Остается найти собственные значения этих трансфер-матриц, то есть решить задачу на собственные значе-

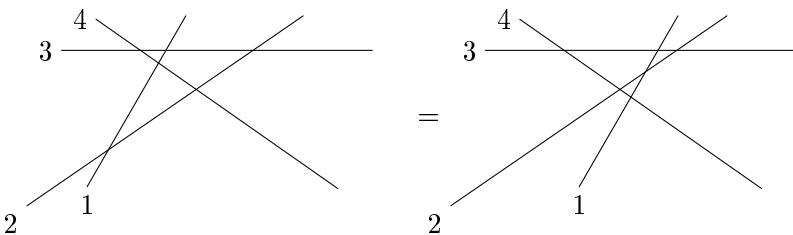


Рис. 3.39.

ния

$$T(u)\psi = \Lambda(u)\psi.$$

Можно действовать одним из следующих способов:

- 1) Координатный анзатц Бете;
- 2) Алгебраический анзатц Бете;
- 3) Подход Бакстера, основанный на аналитических свойствах собственных значений  $T(u)$  и так называемом  $Q$ -операторе.

Далее будут продемонстрированы все эти методы нахождения собственных значений трансфер-матриц.

### **Связь трансфер-матрицы модели льда с гамильтонианом одномерной квантовой цепочки XXZ**

Рассмотрим так называемую XXZ-модель. Она является частным случаем модели XYZ — простейшей модели, адекватно описывающей одномерный магнетик, то есть систему на одномерной решетке, в каждом узле которой расположен спин  $\vec{\sigma}_k$ , взаимодействующий с ближайшими соседями. XYZ-модель обладает гамильтонианом, который может быть записан следующим образом.

Пусть  $H$  — двумерное пространство, натянутое на векторы  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ . Пусть также на  $H$  действуют спиновые матрицы Паули, записанные в этом базисе:

$$\begin{aligned} \sigma^x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Конфигурационное пространство цепочки XXZ можно представить в виде тензорного произведения нескольких копий  $V_k$  пространства  $V$ , где пространство  $V_k$  соответствует  $k$ -ому спину. В этом случае мы будем обозначать через  $\sigma_k^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) спиновые операторы в  $V_k$ . Будем также считать, что на остальных пространствах они действуют как тождественные операторы.

Гамильтониан XYZ-модели в терминах так введенных операторов имеет следующий вид:

$$H_{XYZ} = \sum_k (J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z).$$

Здесь  $k$  нумерует спины в цепочке. В случаях  $J_x = J_y = J_z$  и  $J_x = J_y \neq J_z$  ее называют XXX- и XXZ-моделью соответственно.

Очень часто для упрощения записи гамильтониан XXZ записывают в виде

$$H_{XXZ} = \sum_k \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\eta)} (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \operatorname{ch}(\eta) \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z).$$

Параметр  $\eta$  описывает анизотропию взаимодействия в  $(x, y, z)$ -пространстве.

Существует связь между моделями льда и XXZ. Именно, как мы сейчас покажем, логарифмическая производная трансфер-матрицы модели льда в нуле,  $T^{-1}(0)\dot{T}(0)$ , отличается от гамильтониана XXZ-цепочки, состоящей из  $N$  спинов с периодическими граничными условиями, лишь на слагаемое, кратное единичной матрице. Периодичность граничных условий означает, что первый спин отождествляется с  $(N + 1)$ -м.

Трансфер-матрицу модели льда можно записать следующим образом:

$$T(u) = Tr_0 R_{01}(u)R_{02} \dots R_{0N},$$

где  $R_{0k}$  действует на тензорном произведении  $V_0 \otimes V_k$ , где  $V_0$  — вспомогательное пространство, а след берется по этому вспомогательному пространству (см. также рис. 3.40).

Нетрудно проверить, что в базисе  $\{+ \otimes +, - \otimes +, + \otimes -, - \otimes -\}$   $R$ -матрицу можно выразить через матрицы Паули:

$$R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(u) = \begin{pmatrix} w_0 + w_1 \sigma^z & c \sigma^- \\ c \sigma^+ & w_0 - w_1 \sigma^z \end{pmatrix},$$

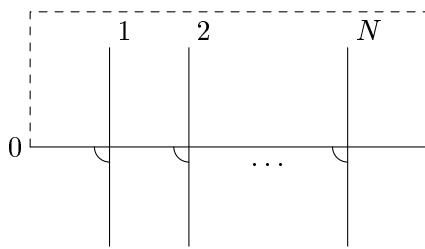


Рис. 3.40.

где  $w_0 = \frac{a+b}{2}$ ,  $w_1 = \frac{a-b}{2}$ .

Учитывая параметризацию, введенную в прошлой лекции, легко получаем:

$$R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(0) = \operatorname{sh} \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{sh} \eta \delta_\alpha^\nu \delta_\mu^\beta$$

(нормировочный множитель  $\rho$  мы положили равным единице). Последний оператор базис  $\{+ \otimes +, + \otimes -, - \otimes +, - \otimes -\}$  переводит в базис  $\{+ \otimes +, - \otimes +, + \otimes -, - \otimes -\}$  и, следовательно, просто меняет местами векторы в тензорном произведении:  $v \otimes w \rightarrow w \otimes v$ .

Поэтому трансфер-матрица  $T(u)$  в нуле есть просто оператор сдвига  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N}(0) = (\operatorname{sh} \eta)^N \delta_{\alpha_1}^{\beta_2} \delta_{\alpha_2}^{\beta_3} \dots \delta_{\alpha_N}^{\beta_1}$ . Этот оператор действует следующим образом:

$$T(0): v_{\alpha_1} \otimes v_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes v_{\alpha_N} \rightarrow v_{\alpha_N} \otimes v_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes v_{\alpha_{N-1}}$$

Теперь нетрудно найти обратный оператор  $T^{-1}$ :

$$(T_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N}(0))^{-1} = (\operatorname{sh} \eta)^{-N} \delta_{\alpha_1}^{\beta_n} \delta_{\alpha_2}^{\beta_1} \dots \delta_{\alpha_N}^{\beta_{N-1}}.$$

На следующем шаге продифференцируем трансфер-матрицу  $T(u)$  по  $u$  и возьмем получившуюся производную в нуле. Как и раньше,

$$\frac{d}{du} T_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^{\beta_1, \dots, \beta_N}(0) = (\operatorname{sh} \eta)^N \sum_{i=1}^N \delta_{\alpha_1}^{\beta_2} \dots \delta_{\alpha_{i-2}}^{\beta_{i-1}} \dot{R}_{\alpha_{i-1} \alpha_i}^{\beta_i \beta_{i+1}} \delta_{\alpha_{i+1}}^{\beta_{i+2}} \dots \delta_{\alpha_N}^{\beta_1}.$$

Производная от  $R$ -матрицы с учетом выражения для нее находится элементарно. Взяв же ее значение в нуле, получим

$$\dot{R}(0) = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{ch} \eta \end{pmatrix}.$$

Суммируя все перечисленное, мы приходим к следующему выражению для логарифмической производной трансфер-матрицы модели льда, взятой в нуле:

$$(T^{-1}(0)\dot{T}(0))^{\beta_1 \dots \beta_N}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \sum_{i=1}^N (R^{-1}(0)\dot{R}(0))^{\beta_i \beta_{i+1}}_{\alpha_i \alpha_{i+1}}$$

Нетрудно убедиться, что выражение под знаком суммы есть соответствующий матричный элемент оператора

$$\frac{1}{2 \operatorname{sh} \eta} \left( \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{\operatorname{ch} \eta}{2} (I_i I_{i+1} + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \right),$$

где  $I_k$  — тождественный оператор, действующий на  $V_k$ .

В результате мы видим, что с точностью до аддитивного слагаемого, пропорционального единичной матрице,

$$T^{-1}(0)\dot{T}(0) = H_{XXZ}.$$

**Замечание.** Попутно мы получили, что для любого  $u$  трансфер-матрица  $T(u)$  коммутирует с гамильтонианом  $H_{XXZ}$  (это очевидно, поскольку трансфер-матрицы образуют коммутирующее семейство). Следовательно, задача о нахождении собственных векторов гамильтониана  $H_{XXZ}$  эквивалентна задаче о нахождении собственных векторов семейства трансфер-матриц модели льда. В этом смысле имеется соответствие между классической двумерной задачей статистической физики и квантовой одномерной задачей. На самом деле имеется общий принцип, устанавливающий эквивалентность между  $d$ -мерными классическими решеточными моделями и  $(d-1)$ -мерными квантовыми решеточными моделями при нулевой температуре.

## 4. Бете-анзатц

### Координатный Бете-анзатц

Рассмотрим гамильтониан одномерной квантовой цепочки Гейзенберга XXZ со спином  $s = \frac{1}{2}$  в каждом узле:

$$H_{xxz} = J \sum_{x=1}^{N-1} \left( \sigma_x^+ \sigma_{x+1}^- + \sigma_x^- \sigma_{x+1}^+ + \frac{\Delta}{2} \sigma_x^z \sigma_{x+1}^z \right).$$

Вместо параметра  $\Delta$  иногда удобно использовать другой параметр  $\eta$ , связанный с  $\Delta$  соотношением

$$\Delta = \cos 2\eta.$$

Наложим цилиндрические граничные условия, то есть будем считать, что  $N$ -й и первый спины взаимодействуют друг с другом. В гамильтониане это можно учесть формально, вводя дополнительный  $(N+1)$ -ый спин и отождествляя его с первым.

Конфигурационное пространство цепочки можно представить в виде прямой суммы

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_N,$$

где через  $V_i$  обозначено конфигурационное пространство изолированного  $i$ -го спина.

В каждом  $V_i$  рассмотрим базис, в котором  $\sigma^z$  диагональна. Обозначим символами  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$  векторы, отвечающие собственным значениям  $\sigma^z = +1$  и  $\sigma^z = -1$ :

$$\sigma^z |\uparrow\rangle = +|\uparrow\rangle, \quad \sigma^z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle.$$

Для определенности положим  $J = -1$ . Тогда вектору

$$\psi_0 = |\uparrow\uparrow\dots\uparrow\rangle$$

соответствует минимум энергии  $E = -\frac{N}{2} \cos 2\eta$ . Будем отсчитывать энергию от этого наименьшего уровня, то есть сделаем замену

$$H_{xxz} \rightarrow H_{xxz} - E.$$

Гамильтониан принимает вид

$$H_{xxz} = - \sum_{x=1}^N \left( \sigma_x^+ \sigma_{x+1}^- + \sigma_x^- \sigma_{x+1}^+ + \frac{\Delta}{2} (\sigma_x^z \sigma_{x+1}^z - 1) \right).$$

Введем оператор суммарного спина  $S^z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^z$ .

Легко проверить, что  $[H, S^z] = 0$ . Поэтому существует система векторов, собственных и для  $H_{xxz}$ , и для  $S^z$ .

Для нахождения собственных значений и собственных векторов гамильтониана  $H_{xxz}$  мы используем координатный анзатц Бете.

**Случай одного перевернутого спина.** Пусть  $|x\rangle = \sigma_x^- \psi_0$ ,  $x = 1, \dots, N$ . Рассмотрим пространство, порожденное этими векторами. Очевидно, что

$$H|x\rangle = -|x+1\rangle - |x-1\rangle + 2\Delta|x\rangle. \quad (3.58)$$

Пусть

$$\Phi = \sum_{x=1}^N a(x)|x\rangle. \quad (3.59)$$

Мы хотим найти такие  $\Phi$ , что  $H\Phi = \varepsilon\Phi$ . Используя (3.58), получим систему уравнений:

$$-a(x+1) - a(x-1) + 2\Delta a(x) = \varepsilon a(x). \quad (3.60)$$

Кроме того, в силу периодичности граничных условий,

$$a(N+1) = a(1). \quad (3.61)$$

Будем искать решение в виде

$$a(x) = e^{2ikx}. \quad (3.62)$$

Подставляя (3.62) в (3.60), получаем

$$\varepsilon = 2(\Delta - \cos 2k) = 2(\cos 2\eta - \cos 2k),$$

а из (3.61) следует ограничение на  $k$ :

$$e^{2ikN} = 1.$$

Из последнего равенства мы видим, что

$$k = \frac{\pi n}{N}, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Таким образом, мы получаем  $N$  собственных векторов.

Найденное нами решение называется *одночастичным* и описывает возбуждение системы, соответствующее одной квазичастице.

**Случай двух перевернутых спинов.** Пусть  $|x, y\rangle = \sigma_y^- \sigma_x^- \psi_0, x < y$ .

Это подпространство векторов со спином  $\frac{N}{2} - 2$ . Пусть

$$\Phi = \sum_{x,y=1}^N a(x, y)|x, y\rangle, \quad x < y. \quad (3.63)$$

Аналогично предыдущему случаю, получаем систему

$$\begin{aligned} a(x-1, y) + a(x+1, y) + a(x, y-1) + a(x, y+1) &= \\ &= (4\Delta - \varepsilon)a(x, y), \quad x < y-1, \\ a(x-1, x+1) + a(x, x+2) &= (2\Delta - \varepsilon)a(x, x+1), \quad x = y-1. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Второе уравнение нельзя получить из первого формальной подстановкой  $x = y-1$ , потому что не определены  $a(x, x)$ . Нам все же хотелось бы распространить область применимости первого уравнения и на случай  $x = y-1$ . Это можно сделать, если выполнены следующие равенства:

$$a(x, x) + a(x+1, x+1) = 2\Delta a(x, x+1), \quad 0 \leq x \leq N. \quad (3.65)$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} a(x-1, y) + a(x+1, y) + a(x, y-1) + a(x, y+1) &= \\ &= (4\Delta - \varepsilon)a(x, y), \quad x < y-1, \\ a(x, x) + a(x+1, x+1) &= 2\Delta a(x, x+1), \quad 0 \leq x \leq N. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ищем ее решение в виде

$$a(x, y) = e^{2ik_1x + 2ik_2y}. \quad (3.67)$$

Подставляя последнее выражение в (3.66), получаем

$$\varepsilon = 2(\cos 2\eta - \cos 2k_1) + 2(\cos 2\eta - \cos 2k_2).$$

Заметим, что найденное значение энергии симметрично относительно замены  $k_1 \leftrightarrow k_2$ . Следовательно, функция  $e^{2ik_2x + 2ik_1y}$  тоже будет решением (3.66) с таким же собственным значением. Совершенно очевидная идея состоит в том, чтобы обобщить решение (3.67) и попробовать линейную комбинацию

$$a(x, y) = A_{12}e^{2ik_1x + 2ik_2y} + A_{21}e^{2ik_2x + 2ik_1y}, \quad (3.68)$$

где коэффициенты  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ , вообще говоря, зависят от  $k_1$ ,  $k_2$  и не зависят от  $x$ ,  $y$ . Подставив (3.68) в (3.65), вводя функцию сдвига  $\psi(k_1, k_2)$ , связывающую коэффициенты  $A_{12}$  и  $A_{21}$  соотношением

$$A_{12} = e^{\psi(k_1, k_2)} A_{21},$$

после простых преобразований получим

$$e^{\psi(k_1, k_2)} = -\frac{1 - 2\Delta e^{2ik_1} + e^{2ik_1 + 2ik_2}}{1 - 2\Delta e^{2ik_2} + e^{2ik_1 + 2ik_2}}. \quad (3.69)$$

Функцию  $\psi(k_1, k_2)$  естественно продолжить нечетным образом, то есть считать  $\psi(k_1, k_2) = -\psi(k_2, k_1)$ . Как и в предыдущем случае, теперь нужно учесть условие периодичности, которое имеет вид

$$a(x, N+1) = a(1, x).$$

Действительно, поскольку  $y > x$ , вектор  $|x, N+1\rangle$  совпадает с вектором  $|0, x\rangle$ . Следовательно, и коэффициенты при этих векторах должны совпадать.

Подставляя (3.68) в условие периодичности, получаем

$$\begin{cases} e^{2ik_1N} = e^{\psi(k_1, k_2)}, \\ e^{2ik_2N} = e^{\psi(k_2, k_1)}, \end{cases} \quad (3.70)$$

или, учитывая (3.69),

$$\begin{cases} e^{2ik_1N} = -\frac{1 - 2\Delta e^{2ik_1} + e^{2ik_1+2ik_2}}{1 - 2\Delta e^{2ik_2} + e^{2ik_1+2ik_2}}, \\ e^{2ik_2N} = -\frac{1 - 2\Delta e^{2ik_2} + e^{2ik_1+2ik_2}}{1 - 2\Delta e^{2ik_1} + e^{2ik_1+2ik_2}}. \end{cases} \quad (3.71)$$

Решив (3.71), мы из (3.69) находим функцию  $\psi(k_1, k_2)$ . Затем из (3.68) определяем  $a(x, y)$ , выбрав, например, следующую нормировку коэффициентов  $A_{12}$  и  $A_{21}$ :

$$\begin{cases} A_{12} = e^{\frac{1}{2}\psi(k_1, k_2)}, \\ A_{21} = e^{\frac{1}{2}\psi(k_2, k_1)}. \end{cases}$$

Затем из (3.63) определяется вектор  $\Phi$ .

**Случай  $n$  перевернутых спинов.** Абсолютно аналогично случаям одного и двух перевернутых спинов ищем собственный вектор в виде

$$\Psi = \sum_{x_1, \dots, x_n=1}^N a(x_1, \dots, x_n) |x_1, \dots, x_n\rangle, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n. \quad (3.72)$$

Уравнение  $H\Psi = \varepsilon\Psi$  эквивалентно системе

$$\begin{aligned} & a(x_1 - 1, \dots, x_n) + a(x_1 + 1, \dots, x_n) + \dots + \\ & + a(x_1, \dots, x_m - 1, \dots, x_n) + \\ & + a(x_1, \dots, x_m + 1, \dots, x_n) + \dots + \\ & + a(x_1, \dots, x_n + 1) = (2n\Delta - \varepsilon)a(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3.73)$$

где разность  $x_{i+1} - x_i > 1$ . Если же мы распространим область применимости (3.73) на область  $x_i - x_{i-1} = 1$ , то необходимо дополнить систему (3.73) уравнениями

$$\begin{aligned} & a(x_1, \dots, x_\alpha, x_\alpha, \dots, x_n) + a(x_1, \dots, x_\alpha + 1, x_\alpha + 1, \dots, x_n) = \\ & = 2\Delta a(x_1, \dots, x_\alpha, x_\alpha + 1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Будем искать решение в виде суперпозиции плоских волн:

$$a(x_1, \dots, x_n) = A(k_1, \dots, k_n) e^{2i(x_1k_1 + \dots + x_n k_n)}. \quad (3.75)$$

Из (3.73) и (3.74) следует, что (3.75) является решением в области  $x_1 < x_2 - 1, x_2 < x_3 - 1, \dots$ , причем энергия равна

$$\varepsilon = 2 \sum_{k=1}^n (\Delta - \cos 2k_i). \quad (3.76)$$

Решение при произвольных  $x_i$  ищем в виде

$$a(x_1, \dots, x_n) = \sum_P A_{p_1, \dots, p_n} e^{2ik_{p_1}x_1 + \dots + 2ik_{p_n}x_n}, \quad (3.77)$$

где суммирование распространяется на все  $n!$  перестановок  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  целых чисел  $1, \dots, n$ .

Бете предположил, что коэффициенты  $A$  не зависят от  $x_i$  и, вообще говоря, зависят от  $k_i$ . Подстановка (3.77), в которой коэффициенты  $A$  удовлетворяют гипотезе Бете, называется анзатцем Бете.

Как и раньше, зададим функции  $\psi_{\alpha, \beta} = \psi(k_\alpha, k_\beta)$  формулой

$$A_{p_1, \dots, p_\alpha, \dots, p_\beta, \dots, p_n} = e^{\psi_{p_\alpha, p_\beta}} A_{p_1, \dots, p_\beta, \dots, p_\alpha, \dots, p_n}. \quad (3.78)$$

Например,

$$\begin{aligned} A_{1,2,3,\dots,n-1,n} &= e^{\psi_{1,2}} A_{2,1,3,\dots,n-1,n}, \\ A_{2,3,1,\dots,n-1,n} &= e^{\psi_{3,1}} A_{2,1,3,\dots,n-1,n}, \\ A_{3,2,1,\dots,n-1,n} &= e^{\psi_{3,1}} A_{1,2,3,\dots,n-1,n}, \\ A_{1,2,3,\dots,n,n-1} &= e^{\psi_{n,n-1}} A_{1,2,3,\dots,n-1,n}. \end{aligned}$$

Используя определение  $\psi_{\alpha, \beta}$ , введем нормировку коэффициентов  $A_{p_1, p_2, \dots, p_n}$ :

$$A_{p_1, \dots, p_n} = \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} \psi_{p_\alpha, p_\beta} \right)$$

Подставив (3.77) в (3.74), учитывая (3.78) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых экспонентах, получаем соотношения, аналогичные (3.69):

$$e^{\psi(k_i, k_j)} = -\frac{1 - 2\Delta e^{2ik_i} + e^{2ik_i + 2ik_j}}{1 - 2\Delta e^{2ik_j} + e^{2ik_i + 2ik_j}}, \quad k_i < k_j. \quad (3.79)$$

Учитывая условие периодичности, которое в этом случае выглядит как

$$a(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, N) = a(1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

где  $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < N$ , и приравнивая опять коэффициенты при линейно независимых функциях, получаем соотношения, аналогичные (3.71):

$$\exp(2ik_j N) = \exp\left(\sum_{\alpha=1, \alpha \neq j}^N \psi(k_\alpha, k_j)\right),$$

то есть должна существовать такая последовательность целых чисел  $\{I_\alpha\}$ , что

$$2Nk_\alpha = 2\pi I_\alpha + \sum_\beta \psi_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha \leq N. \quad (3.80)$$

Система (3.80) является системой уравнений для определения наборов  $\{k_\alpha\}$ . Собственные значения гамильтониана находятся подстановкой этих  $\{k_\alpha\}$  в (3.76).

Будем считать, что  $0 \leq \operatorname{Re} k_\alpha \leq \pi$ ,  $-\pi \leq \operatorname{Im} \psi_{\alpha\beta} \leq \pi$ . Введем следующую параметризацию:

$$\operatorname{ctg} k_\alpha = \operatorname{ctg} \eta \cdot \operatorname{th} u_\alpha,$$

или, что то же самое,

$$e^{2ik_\alpha} = \frac{e^{ik_\alpha}}{e^{-ik_\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} k_\alpha + i}{\operatorname{ctg} k_\alpha - i} = \frac{\operatorname{sh}(u_\alpha + i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha - i\eta)}.$$

Тогда из (3.79) получаем:

$$e^{\psi(k_\alpha, k_\beta)} = \frac{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta + 2i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta - 2i\eta)}.$$

Тогда систему уравнений для определения возможных значений наборов  $\{k_\alpha\}$  можно переписать следующим образом:

$$\left[ \frac{\operatorname{sh}(u_\alpha + i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha - i\eta)} \right]^N = \prod_\beta \frac{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta + 2i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta - 2i\eta)}.$$

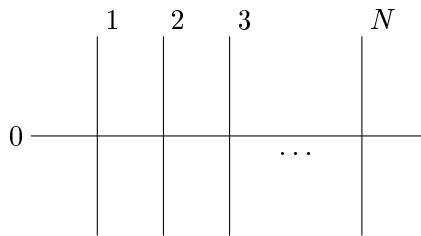


Рис. 3.41.

Эта система имеет ненулевые решения в выделенной нами области значений  $k_\alpha$ .

Таким образом, нам удалось сшить решения системы (3.73), полученные в разных физических областях ( $N!$  областей вида  $x_{p_1} < x_{p_2} < \dots < x_{p_N}$ ). То обстоятельство, что это можно сделать, по сути дела нетривиально. Происходит как бы маленько чудо. Оно и называется координатным анзатцем Бете.

## Алгебраический Бете-анзатц

Продолжим рассмотрение задачи о диагонализации трансфер-матрицы  $T(u)$  шестивершинной модели. Бакстером был предложен очень красивый способ нахождения собственных значений и собственных векторов  $T(u)$ , который, к тому же, может быть с успехом применен и к более общей модели — восьмивершинной. Он носит название алгебраического анзатца Бете и приводит к тем же самым уравнениям, что и координатный, но путем гораздо меньших вычислений.

Для начала дадим определение оператора монодромии  $L(u)$ . Это есть матричное произведение

$$L(u) = R_{01}(u)R_{02}(u)\dots R_{0N}(u),$$

причем в произведении участвуют только индексы, отвечающие вспомогательному пространству «0», а по индексам, отвечающим пространствам 1, ...,  $N$ , подразумевается тензорное произведение. Графически это изображено на рис. 3.41.

Оператор  $L(u)$  может быть записан в виде матрицы  $2 \times 2$ , элементы которой маркируются индексами, соответствующими вспомогатель-

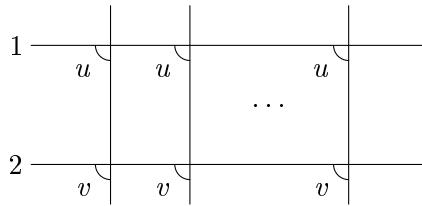


Рис. 3.42.

ному пространству:

$$L(u) = \begin{pmatrix} L_+^+(u) & L_+^-(u) \\ L_-^+(u) & L_-^-(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы  $A(u), B(u), C(u), D(u)$  суть матрицы размера  $2^N \times 2^N$ .

Из определения трансфер-матрицы модели льда следует, что

$$T(u) = \text{Tr}_0 L(u) = A(u) + D(u),$$

где след берется только по вспомогательному пространству.

Матрица монодромии удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера:

$$R_{12}(u-v) \frac{1}{L}(u) \frac{2}{L}(v) = \frac{1}{L}(v) \frac{2}{L}(u) R_{12}(u-v). \quad (3.81)$$

Справедливость этого уравнения легче всего установить, если представить его в графическом виде. Произведение  $\frac{1}{L}(u) \frac{2}{L}(v)$  изображено на рис. 3.42.

В символьической форме рис. 3.42 представляет из себя матричное произведение (в базисе  $\{+\otimes+, +\otimes-, -\otimes+, -\otimes-\}$ ):

$$\begin{aligned} L(u) \otimes L(v) &= \begin{pmatrix} L(u)A(v) & L(u)B(v) \\ L(u)C(v) & L(u)D(v) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A(u)A(v) & B(u)A(v) & A(u)B(v) & B(u)B(v) \\ C(u)A(v) & D(u)A(v) & C(u)B(v) & D(u)B(v) \\ A(u)C(v) & B(u)C(v) & A(u)D(v) & B(u)D(v) \\ C(u)C(v) & D(u)C(v) & C(u)D(v) & D(u)D(v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение Янга–Бакстера (3.81) можно графически представить на рис. 3.43а.

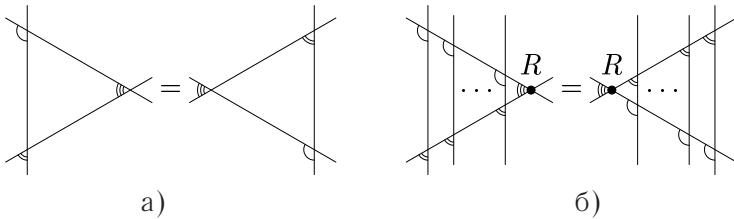


Рис. 3.43.

Из этого графического представления хорошо видно, что равенство (3.81) получается  $N$ -кратным применением уравнения Янга–Бакстера для  $R$ -матрицы (см. рис. 3.43б).

Перейдем теперь к непосредственному изложению алгебраического ансамбля Бете. Его сердцем являются коммутационные соотношения между блочными элементами матрицы монодромии  $L(u)$ :

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix},$$

получающиеся из уравнения Янга–Бакстера, а также нильпотентность матрицы  $\sigma^+$ .

Выпишем явно те коммутационные соотношения между  $A(u)$ ,  $B(u)$ ,  $C(u)$ ,  $D(u)$ , которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\begin{cases} [B(u), B(v)] = 0, \\ b(v-u)A(u)B(v) = a(v-u)B(v)A(u) - c(v-u)B(u)A(v), \\ b(u-v)D(u)B(v) = a(u-v)B(v)D(u) - c(u-v)B(u)D(v). \end{cases} \quad (3.82)$$

Здесь мы используем обычную параметризацию

$$a(u) = \operatorname{sh}(\eta - u), \quad b(u) = \operatorname{sh} u, \quad c(u) = \operatorname{sh} \eta.$$

Заметим, что из явного вида  $b(u)$  следует, что  $b(u - v) = -b(v - u)$ .

Перейдем теперь к построению специального состояния — порождающего вектора в пространстве  $(\mathbb{C}^2)^N$  — пространстве состояний квантовой системы  $N$  спинов. Перепишем локальную  $R$ -матрицу в виде

$$R = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sigma^z & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sigma^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(u) & \beta \\ \gamma & \delta(u) \end{pmatrix}.$$

(Подчеркнем, что  $\beta$  и  $\gamma$  не зависят от спектрального параметра.)

Тогда в локальном пространстве  $n$ , как легко видеть, существует вектор

$$e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

такой, что матрица  $R_{0n}$  действует на него следующим образом:

$$R_{0n} e_n = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Назовем вектор  $e_n$  локальным вакуумом. Он зануляет левый нижний элемент матрицы  $R_{0n}(u)$  и при всех  $u$  является собственным вектором для диагональных элементов. Здесь существенна нильпотентность матрицы  $\sigma^+$ , поскольку только для нильпотентной матрицы всегда существует вектор, действуя ею на который, мы получаем нуль.

Построим теперь вектор  $\psi_0$ , который есть тензорное произведение  $N$  двумерных векторов:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действуя на него матрицей монодромии  $L(u)$ , получаем

$$L(u)\psi_0 = \begin{pmatrix} a^N \psi_0 & * \\ 0 & b^N \psi_0 \end{pmatrix},$$

где звездочкой обозначены не интересующие нас матричные элементы. Последнее выражение следует из правила умножения треугольных матриц.

Для наглядности, в качестве примера, рассмотрим случай  $N = 2$ . Перемножая матрицы  $R_{01}$  и  $R_{02}$ , получаем

$$\begin{aligned} R_{01}R_{02} &= \begin{pmatrix} \alpha_1(u) & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2(u) & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2(u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2 \\ \gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Действуя получившейся матрицей на вектор

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

приходим к желаемому результату:

$$(R_{01}R_{02})\psi_0 = \begin{pmatrix} a^2(u)\psi_0 & * \\ 0 & b^2(u)\psi_0 \end{pmatrix}.$$

Опять вернемся к случаю произвольного  $N$ . Построенное состояние  $\psi_0$  будем называть порождающим вектором. Полученные соотношения

$$\begin{cases} A(u)\psi_0 = a^N(u)\psi_0, \\ D(u)\psi_0 = b^N(u)\psi_0, \\ C(u)\psi_0 = 0 \end{cases}$$

мы используем для нахождения собственных значений и собственных векторов оператора  $A(u) + D(u)$ , то есть трансфер-матрицы  $T(u)$ .

Будем искать собственные векторы  $T(u)$  в виде

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = B(v_1)B(v_2)\dots B(v_n)\psi_0. \quad (3.83)$$

С помощью соотношений (3.82) мы можем преобразовать выражение

$$(A(u) + D(u))B(v_1)B(v_2)\dots B(v_n)\psi_0, \quad (3.84)$$

пронся  $A(u)$  и  $D(u)$  через  $B(v_l)$  к  $\psi_0$ .

Покажем, что

$$\begin{aligned} (A(u) + D(u))B(v_1)\dots B(v_n)\psi_0 &= \\ &= \left[ a^N(u) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\operatorname{sh}(\eta + u - v_i)}{\operatorname{sh}(v_i - u)} + b^N(u) \prod_{i=1}^n \frac{\operatorname{sh}(\eta + v_i - u)}{\operatorname{sh}(u - v_i)} \right] \times \\ &\quad \times B(v_1)\dots B(v_n)\psi_0 + \dots, \end{aligned} \quad (3.85)$$

где многоточие обозначает  $n$  нежелательных слагаемых вида

$$\Lambda_j \cdot B(u) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n B(u_l)\psi_0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.86)$$

где  $\Lambda_j$  — числовые коэффициенты, которые мы сейчас вычислим.

Перепишем нужные нам перестановочные соотношения в виде

$$\begin{aligned} A(u)B(v) &= \frac{a(v-u)}{b(v-u)}B(v)A(u) - \frac{c(v-u)}{b(v-u)}B(u)A(v), \\ D(u)B(v) &= \frac{a(u-v)}{b(u-v)}B(v)D(u) - \frac{c(u-v)}{b(u-v)}B(u)D(v). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Если теперь при протаскивании  $A(u)$  и  $D(u)$  через  $B(v_l)$  мы будем учитывать только первые слагаемые в правых частях формул (3.87), то в результате мы немедленно заключаем, что коэффициент при  $B(v_1)B(v_2)\dots B(v_n)\psi_0$  дается выражением

$$a^N(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(v_i-u)}{b(v_i-u)} + b^N(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u-v_i)}{b(u-v_i)}.$$

Найдем теперь структуру нежелательных членов. Если  $j = 1$ , то при коммутации  $A(u)$  и  $D(u)$  с  $B(v_1)$  мы используем вторые слагаемые в (3.87), а при дальнейшей коммутации возникших  $A(v_1)$  и  $D(v_1)$  с  $B(v_l)$ ,  $l \geq 2$ , опять будем учитывать только первые слагаемые в (3.87). В результате получим слагаемое

$$\begin{aligned} &\frac{c(u-v_1)}{b(u-v_1)} \left( a^N(v_1) \prod_{l=2}^n \frac{a(v_l-v_1)}{b(v_l-v_1)} - b^N(v_1) \prod_{l=2}^n \frac{a(v_1-v_l)}{b(v_1-v_l)} \right) \times \\ &\times B(u)B(v_2)B(v_3)\dots B(v_n)\psi_0. \end{aligned}$$

Для нахождения остальных нежелательных членов заметим, что в силу коммутативности операторов  $B(v_l)$  выражение (3.84) является симметрической функцией от  $v_1, \dots, v_n$  и, следовательно, оставшиеся нежелательные члены получаются из найденного нами надлежащей перестановкой переменных  $v_l$ . Тем самым, коэффициенты  $\Lambda_j$  в (3.86) имеют вид

$$\Lambda_j = \frac{c(u-v_j)}{b(u-v_j)} \left( a^N(v_j) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{a(v_l-v_j)}{b(v_l-v_j)} - b^N(v_j) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{a(v_j-v_l)}{b(v_j-v_l)} \right). \quad (3.88)$$

Здесь  $j$  пробегает значения от 1 до  $n$ .

Поскольку мы хотим, чтобы вектор  $B(v_1) \dots B(v_n)\psi_0$  был собственным вектором трансфер-матрицы, сумму нежелательных членов необходимо положить равной нулю. Мы же потребуем большего — будем считать, что исчезает каждое слагаемое в отдельности, то есть

$$\Lambda_j(u; u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

или, что то же самое,

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\operatorname{sh}(v_j - v_i + \eta)}{\operatorname{sh}(v_j - v_i - \eta)} = - \left[ \frac{\operatorname{sh}(v_j)}{\operatorname{sh}(\eta - v_j)} \right]^N. \quad (3.89)$$

Последние уравнения, как легко видеть, совпадают с уравнениями, полученными при помощи координатного анзатца Бете.

Отметим, что в формулах (3.83), (3.85), (3.89) допустимыми значениями параметра  $n$  являются  $0, 1, \dots, N$ , так как при  $n > N$  выражение (3.83) тождественно обращается в нуль. Это следует из коммутативности операторов  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$  при разных  $j$  и равенства  $\beta_j^2 = 0$ .

Для наглядности опять рассмотрим случай  $N = 2$ . Собственные вектора трансфер-матрицы  $T(u)$  следует искать в виде

$$\Phi(v_1, v_2) = B(v_1)B(v_2)\psi_0. \quad (3.90)$$

Действуя на (3.90) трансфер-матрицей, получим

$$\begin{aligned} (A(u) + D(u))B(v_1)B(v_2)\psi_0 &= \\ &= \frac{a(v_1 - u)}{b(v_1 - u)} \frac{a(v_2 - u)}{b(v_2 - u)} B(v_1)B(v_2)A(u)\psi_0 - \\ &\quad - \frac{c(v_1 - u)}{b(v_1 - u)} \frac{a(v_2 - v_1)}{b(v_2 - v_1)} B(u)B(v_2)A(v_1)\psi_0 + \\ &\quad + \left\{ \frac{c(v_1 - u)c(v_2 - v_1)}{b(v_1 - u)b(v_2 - v_1)} - \frac{a(v_1 - u)c(v_2 - u)}{b(v_1 - u)b(v_2 - u)} \right\} \times \\ &\quad \times B(u)B(v_1)A(v_2)\psi_0 + \dots, \end{aligned}$$

где под многоточием подразумеваются аналогичные члены для  $D(u)$ .

Выражение в фигурных скобках можно преобразовать, используя обычную параметризацию и теоремы сложения для тригонометрических функций. В результате получаем желаемый результат (3.85).

Из этого вывода становится ясным, что прямое доказательство равенства (3.88) должно опираться на формулы сложения для коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Мы же существенно облегчили себе работу, использовав симметричность произведения  $B(v_1)B(v_2)\dots B(v_n)$  относительно перестановки аргументов  $v_1, \dots, v_n$ .

Также следует отметить, что при выводе соотношения (3.88) мы использовали то обстоятельство, что все  $v_i$  различны. Случай совпадающих  $v_i$  требует специального обсуждения, и, ввиду сложности вопроса, мы опустим здесь его изложение.

## Алгебраический анзатц Бете и $Q$ -оператор

В этой лекции мы изложим еще один вариант алгебраического анзатца Бете. Он основан на использовании так называемых  $Q$ -оператора Бакстера и уравнения  $T-Q$ , которому удовлетворяет этот оператор.

Пусть нам удалось найти такие векторы  $\psi^i(\beta)$  и  $p^i(\mu)$ , где  $i = 1, \dots, N$ , что

$$\sum_{\beta, \nu} R_{\beta \nu}^{\alpha \mu} \psi^i(\beta) p^{i+1}(\nu) = \tilde{\psi}^i(\alpha) p^i(\mu) \quad (3.91)$$

и, кроме того,  $p^{N+1}(\mu) = p^1(\mu)$ .

Тогда, как мы сейчас покажем, две матрицы  $G_i(+)$  и  $G_i(-)$ , задаваемые своими матричными элементами посредством формул

$$[G_i(+)]_\mu^\nu = \sum_\beta R_{+\mu}^{\beta \nu} \psi^i(\beta), \quad [G_i(-)]_\mu^\nu = \sum_\beta R_{-\mu}^{\beta \nu} \psi^i(\beta), \quad (3.92)$$

преобразованием подобия

$$G_i(\alpha) \rightarrow M_i^{-1} G_i(\alpha) M_{i+1} \equiv \tilde{G}_i(\alpha) \quad (3.93)$$

могут быть приведены к треугольному виду. Первый столбец матрицы  $M_i$  есть вектор  $p_i$ , а второй ортогонален ему:

$$M_i = \begin{pmatrix} p^i(+) & -p^i(-) \\ p^i(-) & p^i(+) \end{pmatrix} = (p, p^\perp).$$

Обратная матрица:

$$M_i^{-1} = \frac{1}{\det M_i} \begin{pmatrix} p^i(+) & p^i(-) \\ -p^i(-) & p^i(+) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M_i} \begin{pmatrix} p \\ p^\perp \end{pmatrix},$$

где  $\det M_i = [p^i(+)]^2 + [p^i(-)]^2$ .

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} [\tilde{G}_i]_{21}(\alpha) &= \frac{1}{\det M_i} p_i^\perp(\mu) R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} \psi^i(\beta) p^{i+1}(\nu) = \\ &= \frac{1}{\det M_i} \tilde{\psi}^i(\alpha) [p_i^\perp(\mu) p_i(\mu)] = 0. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11}^i(\alpha) &= \frac{1}{\det M_i} \tilde{\psi}^i(\alpha) (p^i(\mu) p^i(\mu)) = \tilde{\psi}, \\ \tilde{G}_{22}^i(\alpha) &= \frac{1}{\det M_i} p_i^\perp(\mu) R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} \psi^i(\beta) p_{i+1}^\perp(\nu) \equiv \tilde{\tilde{\psi}}^i(\alpha). \end{aligned}$$

Если теперь подействовать трансфер-матрицей

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N} = \text{Tr}_0 R_{01} R_{02} \dots R_{0N}$$

на вектор  $\psi^1(\alpha_1) \dots \psi^N(\alpha_N)$ , то мы получим:

$$\begin{aligned} T_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N} \psi^1(\alpha_1) \dots \psi^N(\alpha_N) &= \text{Tr } G_1(\alpha_1) \dots G_N(\alpha_N) = \\ &= \text{Tr } \tilde{G}^1(\alpha_1) \dots \tilde{G}^N(\alpha_N) = \\ &= \tilde{\psi}^1(\alpha_1) \dots \tilde{\psi}^N(\alpha_N) + \tilde{\tilde{\psi}}^1(\alpha_1) \dots \tilde{\tilde{\psi}}^N(\alpha_N). \end{aligned}$$

(Мы учли, что  $p^{N+1}(\mu) = p^1(\mu)$ ).

Существование достаточно богатого набора линейно независимых решений (3.91) позволяет построить матрицу  $Q$ , удовлетворяющую некоторому функциональному уравнению, называемому  $T-Q$ -уравнением Бакстера, из которого мгновенно следуют уравнения Бете-анзатца.

Итак, решим уравнение (3.91). Подставляя значения элементов  $R$ -матрицы,

$$\begin{aligned} R_{++}^{++} &= R_{--}^{--} = a, \\ R_{+-}^{+-} &= R_{-+}^{-+} = b, \\ R_{-+}^{+-} &= R_{+-}^{-+} = c, \end{aligned}$$

получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} a\psi^i(+)\bar{p}^{i+1}(+) = \tilde{\psi}^i(+)\bar{p}^i(+), \\ b\psi^i(-)\bar{p}^{i+1}(+) + c\psi^i(+)\bar{p}^{i+1}(-) = \tilde{\psi}^i(-)\bar{p}^i(+), \\ b\psi^i(+)\bar{p}^{i+1}(-) + c\psi^i(-)\bar{p}^{i+1}(+) = \tilde{\psi}^i(+)\bar{p}^i(-), \\ a\psi^i(+)\bar{p}^{i+1}(+) + a\psi^i(-)\bar{p}^{i+1}(-) = \tilde{\psi}^i(-)\bar{p}^i(-). \end{cases} \quad (3.94)$$

Эти уравнения линейны и однородны относительно  $\psi^i(\alpha)$ ,  $\tilde{\psi}^i(\alpha)$ . Чтобы такая система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю. Приходим в итоге к уравнению

$$[a^2 + b^2 - c^2]p_i(+)\bar{p}_i(-)\bar{p}_{i+1}(+)\bar{p}_{i+1}(-) - ab[p_i^2(+)\bar{p}_{i+1}^2(-) + p_i^2(-)\bar{p}_{i+1}^2(+)] = 0. \quad (3.95)$$

Введем обозначение:

$$r_i = \frac{p_i(-)}{p_i(+)}. \quad (3.96)$$

Тогда (3.95) можно переписать в виде

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{r_i}{r_{i+1}}. \quad (3.97)$$

С учетом параметризации

$$\begin{cases} a = \operatorname{sh}(\eta - u), \\ b = \operatorname{sh} u, \\ c = \operatorname{sh} \eta, \end{cases}$$

(3.97) сводится к

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{r_i}{r_{i+1}} = -2 \operatorname{ch} \eta. \quad (3.98)$$

Мы получили квадратное рекуррентное соотношение между  $r_i$  и  $r_{i+1}$ . Из него следует, что

$$r_{i+1} = -r_i \exp(\pm \eta). \quad (3.99)$$

Соотношение (3.99) должно выполняться для  $i = 1, \dots, N$ , причем выбор знака производится независимо для каждого  $i$ . Таким образом,

$$r_i = (-1)^i r \exp[\eta(\sigma_1 + \dots + \sigma_{i-1})], \quad (3.100)$$

где  $r$  — произвольный коэффициент и каждая переменная  $\sigma_i$  принимает значения  $\pm 1$ .

Если  $\eta$  вещественно и  $\Delta < -1$ , то, поскольку  $p_{N+1} = p_1$ ,

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_N = 0, \quad (3.101)$$

откуда следует требование четности  $N$ .

Если же  $\eta = \frac{2\pi i m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, то достаточно, чтобы сумма  $\sigma_1 + \dots + \sigma_N$  была целым кратным  $n$ .

Положим теперь  $p_i(+) = 1$ ,  $\psi_i(+) = 1$  для любого  $i = 1, \dots, N$ . Тогда  $p_i(-) = r_i$ ,  $\psi_i(+) = a$ . Кроме того, имеем из третьего уравнения (3.94)

$$c\psi_i = r_i \tilde{\psi}_i(+) - br_{i+1} = ar_i - br_{i+1},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \psi_i(-) &= \frac{a}{c}r_i - \frac{b}{c}r_{i+1} = \\ &= r_i \cdot \frac{\operatorname{sh}(\eta - u) + e^{\eta\sigma_i} \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} \eta} = r_i e^{u\sigma_i}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Аналогично, из второго уравнения (3.94):

$$\tilde{\psi}_i(-) = -ar_i e^{(u+\eta)\sigma_i}. \quad (3.103)$$

В итоге мы получаем, что двумерные векторы  $\psi_i(\alpha)$ ,  $\tilde{\psi}_i(\alpha)$ ,  $\tilde{\tilde{\psi}}_i(\alpha)$  можно записать в виде

$$\psi_i = \begin{pmatrix} 1 \\ r_i e^{u\sigma_i} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi}_i = \begin{pmatrix} a \\ -r_i e^{(u+\eta)\sigma_i} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\psi}}_i = \begin{pmatrix} b \\ -r_i e^{(u-\eta)\sigma_i} \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

Введем векторную функцию

$$h_i(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ r_i e^{u\sigma_i} \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

где  $r_i$  определены выражением (3.100), то есть не зависят от  $u$ . Тогда, как легко видеть,

$$\psi_i = h_i(u), \quad \tilde{\psi}_i = ah_i(u + \eta + i\pi), \quad \tilde{\tilde{\psi}}_i = bh_i(u - \eta - i\pi).$$

Если мы теперь подействуем трансфер-матрицей  $T(u)$  на  $\psi(u) = \psi_1(u) \otimes \psi_2(u) \otimes \dots \otimes \psi_N(u)$ , то получим уравнение

$$T(u)\psi(u) = a^N \psi(u + \eta + i\pi) + b^N \psi(u - \eta - i\pi). \quad (3.106)$$

Выбирая всевозможные  $r, \sigma_1, \dots, \sigma_N$ , такие, что выполнено условие (3.101), мы получим много различных  $\psi(u)$ . Из них можно составить матрицу  $Q_R$  размера  $2^N \times 2^N$ , рассматривая разные  $\psi$  как столбцы  $Q_R$ . Эта матрица, в силу (3.106), удовлетворяет уравнению

$$T(u)Q_R(u) = a^N(u)Q_R(u + \eta + i\pi) + b^N(u)Q_R(u - \eta - i\pi). \quad (3.107)$$

Чтобы продвинуться дальше, заметим, что  $R$ -матрица обладает так называемым свойством кроссинг-симметрии. Что происходит с элементами  $R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(u)$  при замене  $u \rightarrow \eta - u$ ? Очевидно, что  $c(u)$  в этом случае не изменяется, а  $a(u)$  и  $b(u)$  переходят друг в друга. Это можно записать следующим образом:

$$R_{\beta\mu'}^{\alpha\nu'}(\eta - u) = (C^{-1})^\mu_\mu R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(u) C_\nu^\nu, \quad (3.108)$$

где  $C = \sigma_x$ .

В результате трансфер-матрица модели льда удовлетворяет соотношению кроссинг-симметрии:

$$T_{\beta_1 \dots \beta_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(u) = T_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^{\beta_1 \dots \beta_N}(\eta - u). \quad (3.109)$$

Вводя  $Q_L$  согласно формуле

$$Q_L(u) = Q_R^T(\eta - u), \quad (3.110)$$

где значок  $T$  означает транспонирование, мы приходим к уравнению

$$Q_L(u)T(u) = a^N Q_L(u + \eta + i\pi) + b^N Q_L(u - \eta - i\pi). \quad (3.111)$$

Прямой проверкой можно показать, что

$$Q_L(u)Q_R(v) = Q_L(v)Q_R(u). \quad (3.112)$$

Имеются некоторые доводы в пользу существования таких значений параметра  $u$ , что при произвольных  $r$  векторы  $\psi$ , отвечающие различным наборам  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ , порождают все  $2^N$ -мерное пространство. Поэтому должны существовать такие значения параметра  $u$ , которые мы будем обозначать  $u_0$ , что матрицы  $Q_R(u_0)$  и  $Q_L(\eta - u_0)$  являются невырожденными.

Матрица, определяемая выражением

$$Q(u) = Q_R(u)Q_R^{-1}(u_0) \quad (3.113)$$

называется  $Q$ -оператором.

Из (3.112) следует, что также  $Q(u) = Q_L^{-1}(u_0)Q_L(u)$ . Домножая уравнение (3.107) справа на  $Q_R^{-1}(u_0)$ , а уравнение (3.111) слева на  $Q_L^{-1}(u_0)$ , получаем, что

$$T(u)Q(u) = a^N(u)Q(u + \eta + i\pi) + b^N(u - \eta - i\pi) = Q(u)T(u).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} Q(u)Q(v) &= Q_L^{-1}(u_0)Q_L(u)Q_R(v)Q_R^{-1}(u_0) = \\ &= Q_L^{-1}(u_0)Q_L(v)Q_R(u)Q_R^{-1}(u_0) = Q(v)Q(u). \end{aligned}$$

Итак, для любых  $u$  и  $v$  имеют место равенства

$$[T(u), T(v)] = 0, \quad [T(u), Q(v)] = 0, \quad [Q(u), Q(v)] = 0$$

и

$$\Lambda(u)Q(u) = a^N(u)Q(u + \eta + i\pi) + b^N(u)Q(u - \eta - i\pi). \quad (3.114)$$

Из последнего уравнения и того обстоятельства, что функции  $\Lambda(u)$  и  $Q(u)$  целые, следует их вид. Поскольку целая функция  $Q(u)$  периодична,

$$Q(u) = \prod_{i=1}^N \operatorname{sh}(u - u_i),$$

где  $u_i$  — неизвестные пока нули  $Q(u)$ .

Полагая в (3.114)  $u = u_i$ , получим следующие уравнения на  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ :

$$\frac{a^N(u_i)}{b^N(u_i)} = - \prod_{j=1}^N \frac{\operatorname{sh}(u_i - u_j - \eta - i\pi)}{\operatorname{sh}(u_i - u_j + \eta + i\pi)},$$

или

$$\begin{aligned} \left( \frac{\operatorname{sh}(\eta - u_i)}{\operatorname{sh}(u_i)} \right)^N &= - \prod_{j=1}^N \frac{\operatorname{sh}(u_i - u_j - \eta - i\pi)}{\operatorname{sh}(u_i - u_j + \eta + i\pi)} = \\ &= - \prod_{j=1, j \neq i} \frac{\operatorname{sh}(u_i - u_j - \eta)}{\operatorname{sh}(u_i - u_j + \eta)}. \end{aligned}$$

Из полученных уравнений находятся  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . После этого, зная  $Q(u)$ , можно вычислить собственные значения трансфер-матрицы  $T(u)$ :

$$\Lambda(u) = \frac{a^N(u)Q(u + \eta + i\pi) + b^N(u)Q(u - \eta - i\pi)}{Q(u)}.$$

Александр Абрамович Белавин  
Александр Георгиевич Кулаков  
Руслан Абдуллаевич Усманов

## Лекции по теоретической физике

Издательство Московского Центра  
непрерывного математического образования

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать

20.09.2001г. Формат 60 × 90/16.

Бумага офсетная № 1. Усл. печат. л. 14

Тираж 1000 экз. Заказ № 8090

МЦНМО  
121002, Москва, Большой Власьевский пер. 11.  
тел. 241-05-00

Отпечатано с готовых диапозитивов в  
Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,  
140010, г. Люберцы Московской обл.,  
Октябрьский пр-т, 403. тел. 554-21-86

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести по адресу:  
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.  
Тел.: (095) 241-72-85.  
email: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru)